Журнал «Информатика в школе», № 10, 2016 г.

ИНФОРМАТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ: ЧЕТЫРЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ С ПОКЕМОНОМ

В. Ф. Очков, Альваро Диаз Фалькони

Сайт статьи: https://www.ptcusercommunity.com/thread/137953

Если спросить школьников или студентов, что такое *парабола*, то почти все скажут, что это линия, отображающая на графике квадратное уравнение. И только единицы вспомнят, что парабола — это геометрическое место точек на плоскости с определенным свойством [5]. С *окружностью* ситуация обратная. Все помнят про точки на плоскости, равноудаленные от центра окружности, но мало кто сходу напишет алгебраическое выражение, по которому строится окружность на декартовом графике.

Давайте рассмотрим «геометрическое», а не «алгебраическое» определение параболы и построим ее график, опираясь не на квадратный полином, а на «поточечное» определение параболы.

Если на плоскости провести прямую линию и поставить около нее точку, то парабола будет состоять из точек, равноудаленных от прямой линии (от *директрисы* параболы) и от заданной точки (от *фокуса* параболы). Такое поточечное построение параболы несложно сделать на бумаге, взяв в руки карандаш, циркуль и угольник: раздвигаем циркуль на определенный угол (рис. 1), ставим его иглу в точке-фокусе и чертим дугу окружности. Затем с помощью угольника проводим под прямым углом от директрисы к дуге прямую линию так, чтобы на дуге окружности поставить точку, равноудаленную от фокуса и директрисы. Далее меняем угол раскрытия циркуля и повторяем все сначала, проставляя на графике все новые и новые точки будущей параболы.

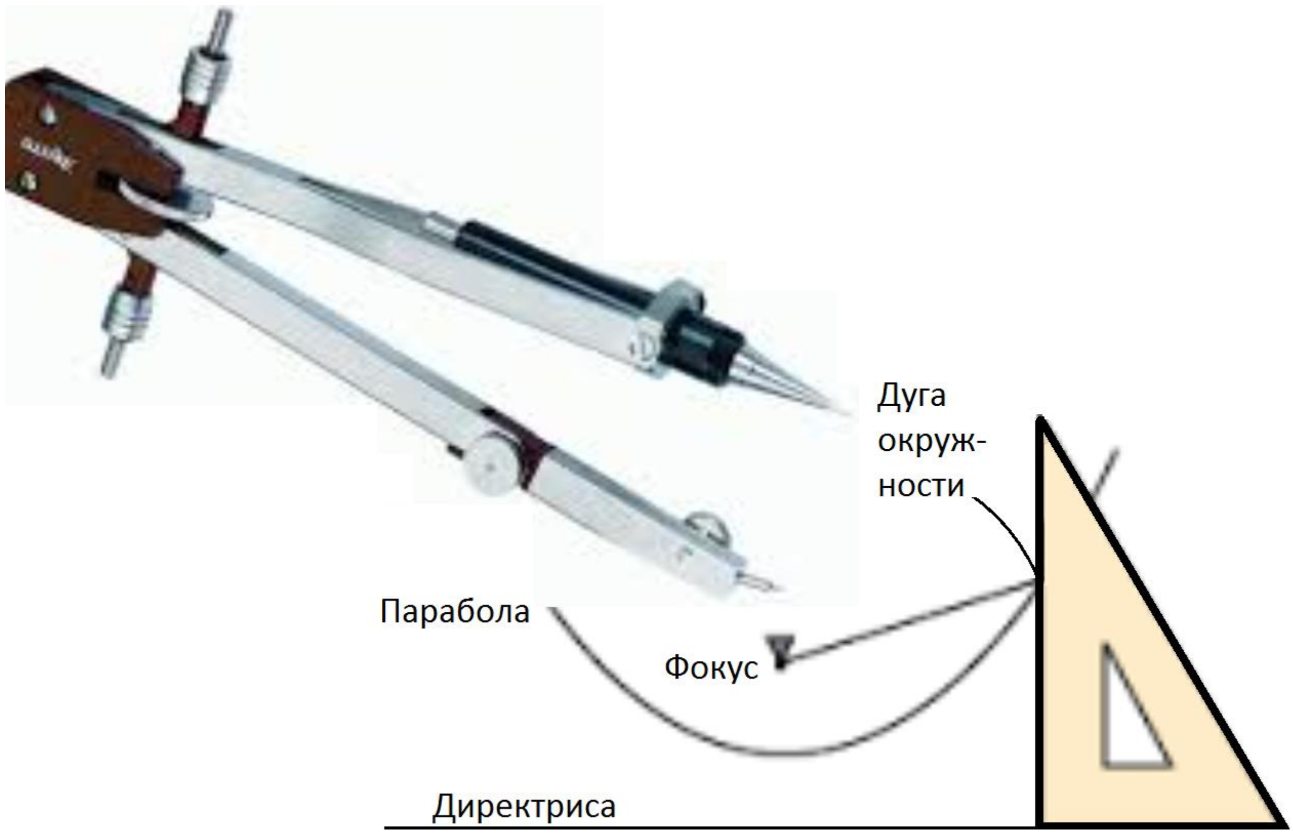

Рис. 1. Построение параболы циркулем и угольником

Но современные школьники и студенты, увы, постепенно отучаются работать с реальными чертежными инструментами, так как все можно начертить на экране компьютера, а затем перенести начерченное на бумагу 2D-принтера или даже «вылепить» модель на 3D-принтере.

Компьютер с его быстродействием и точностью в сочетании с нашей смекалкой позволяет строить любые кривые простым сканированием заданной прямоугольной области x_1—x_2—y_1—y_2, опираясь на «поточечное», а не на формульное определение кривой. Это будет, как говорил один киноперсонаж[1], «неэстетично, зато дешево, надежно и практично» [1]. Давайте же построим таким сканированием несколько кривых — уже известных и еще не исследованных.

На рисунке 2 показан Mathcad-документ, по которому сканированием строится парабола с фокусом в точке с координатами (x_F, y_F) и с «горизонтальной» директрисой, отстоящей от оси X на расстояние Dir. Фокус на рисунке 2 имеет координату x_F, равную нулю, но можно задавать и другие значения. Директрису в общем случае можно провести под любым углом к оси X: программа на рисунке 2 несколько усложнится в плане расчета переменной $L2$ — расстояния от директрисы до фокуса, а сама парабола при этом «свернется на бок».

[1] Лелик в исполнении Папанова из «Бриллиантовой руки»

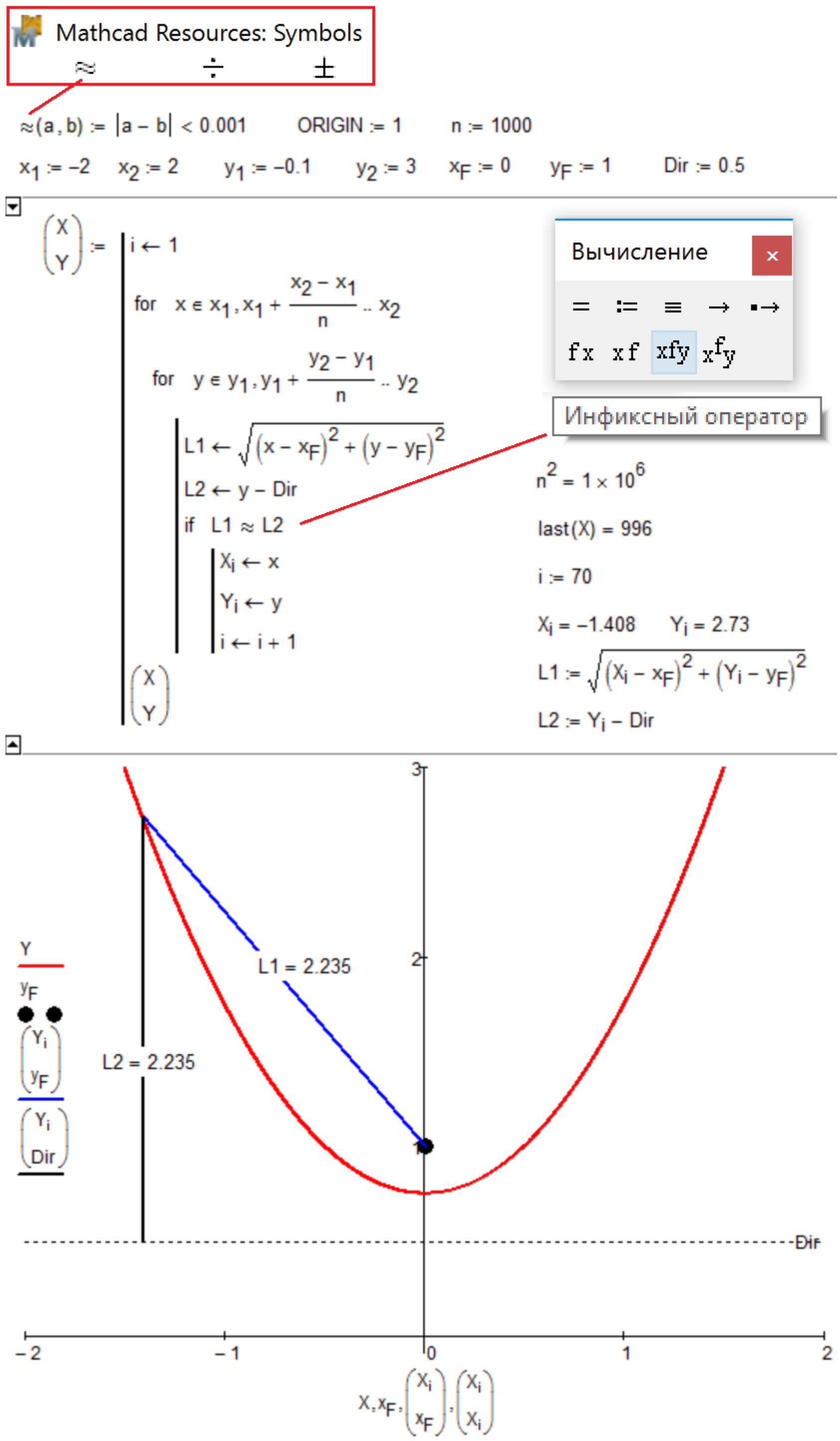

Рис. 2. Построение параболы

В программе на рисунке 2 циклом for с параметром x, в который вложен второй цикл for с параметром y, перебираются точки в прямоугольной области от x_1 до x_2 с шагом $\frac{x_2 - x_1}{n}$ и от y_1 до y_2 с шагом $\frac{y_2 - y_1}{n}$. Переменные x_1, x_2, y_1 и y_2, как и другие нужные для расчета величины, задаются заранее. Значение целочисленной переменной n можно менять, добиваясь компромисса между точностью и длительностью вычислений. В двойном цикле for вычисляются расстояние $L1$ от текущей точки с координатами x и y до фокуса и расстояние $L2$ от текущей точки до директрисы. Если (if) расстояния $L1$ и $L2$ окажутся равными[2], то координаты текущей точки заносятся в векторы X и Y, длина которых при этом увеличивается на единицу ($i \leftarrow i + 1$, где i — это индекс векторов X и Y). Затем векторы X и Y отображаются на графике в виде искомой кривой, состоящей из точек. Если этих точек достаточно много, то они сливаются в линию. Там же на графике отмечен фокус параболы, ее директриса и отрезки $L1$ и $L2$ для одной из выбранных точек на параболе.

Задание: начертить параболу (см. рис. 2), когда директриса расположена под произвольным углом к оси X.

Фокус параболы, о котором, повторяем, многие школьники забывают, помня только квадратное уравнение параболы, имеет очень важный физический смысл. Если на нашу параболу сверху пустить параллельный пучок лучей, то они, отразившись от параболы (угол падения равен углу отражения), сойдутся в фокусе [3]. Это свойство данной кривой используется в параболических антеннах, в фокусе которых помещают приемник радиосигналов[3]. Некоторые ошибочно полагают, что в сечениях таких антенн «сидит» не парабола, а *гипербола*. Виной тому знаменитый роман А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина». Гиперболу с параболой роднит еще и то, что школьники опять же в первую очередь связывают гиперболу не с геометрией точек, ее образующих, а с алгеброй, в частности, с простейшей «школьной» формулой гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. Объединяет параболу с гиперболой и то, что фокус есть и у гиперболы — фокусов у гиперболы два.

На рисунке 3 показано построение гиперболы с опорой на ее геометрическое, а не алгебраическое определение.

---

[2] Вернее, примерно равными: мы задачу решаем численно, следовательно, приближенно. Первым оператором в документе на рисунке 2 введена функция пользователя «примерно равно» (символ ≈ берется из Ресурсов Mathcad – см. начало рис. 21), которая в двойном цикле перебора для лучшей наглядности вызывается в виде инфиксного оператора — в принятом в математике написании.

[3] Параболу, вернее, параболоид (поверхность, полученную вращением параболы вокруг оси, перпендикулярной директрисе и проходящей через фокус) можно увидеть не только на стенах домов, где смотрят спутниковое телевидение, но и… зимой на ледяных горках. Рассказывают, что когда-то давно одному заводу, выпускающему параболические антенны для нужд военных, поручили изготавливать конверсионную продукцию. Руководство завода, недолго думая, решило прикрепить к этой тарелке две кожаные петли. Получилась отличная ледянка. А вот еще один возможный товар народного потребления «с параболой внутри»: стеклянная или фарфоровая ваза для фруктов в виде параболоида с круглой подставкой-директрисой и ножкой, пронизывающей в центре сам параболоид и заканчивающейся в фокусе ручкой-шаром. Такая ваза хорошо смотрелась бы в доме математика — будет, о чем поговорить с гостями за столом. Ее можно расписать не традиционными узорами, а математическими выкладками, связанными с параболой.

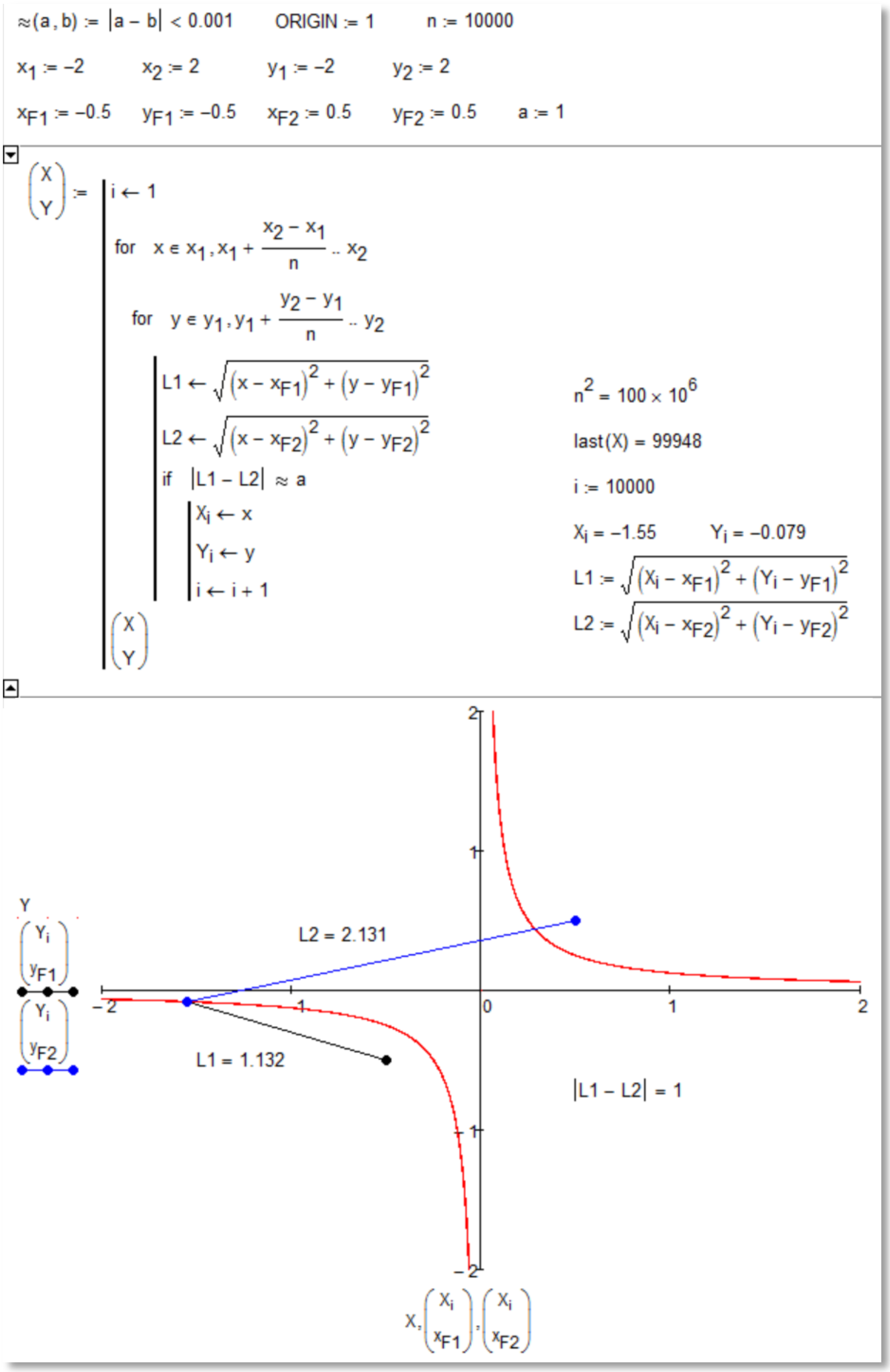

Рис. 3. Построение гиперболы

Гипербола — это геометрическое место точек, модуль *разности* расстояний от которых до двух фокусов является постоянной величиной (у нас это параметр a). В программе на рисунке 3 это определение записано как $|L1 - L2| = a$. Но это выражение можно разбить на два: $L1 - L2 = a$ и $L2 - L1 = a$, которые будут формировать две отдельные ветви гиперболы с двумя фокусами соответственно.

Если разность расстояний точек кривой от двух фокусов заменить на *сумму*, то две ветви такой гиперболы свернутся в *эллипс*. Если же у эллипса два фокуса сместить в один, то получится *окружность* с диаметром a.

Задание: Построить эллипс с двумя фокусами и окружность с одним фокусом (центром).

Но окружность можно построить и с двумя фокусами, используя *деление* $\frac{L1}{L2} = a$ или $\frac{L2}{L1} = a$. Это будут так называемые ***окружности Аполлония***. Мы не показываем здесь рисунки с построением эллипса и окружности, читатель может выполнить их сам, слегка подправив расчет на рисунке 3: заменив выражение $|L1 - L2|$ (гипербола) на $L1 + L2$ (эллипс) или $\frac{L1}{L2}$ (окружность[4]).

Задание: Построить окружности Аполлония.

Параболу, гиперболу, эллипс и окружность (частный случай эллипса) называют ***коническими кривыми***, так как они получаются при пересечении плоскости с прямым круговым конусом. Если же иметь в виду алгебру, а не геометрию, то парабола, гипербола, эллипс и окружность — это плоские ***кривые второго порядка***, описываемые уравнением $a + bx + cx^2 + dy + ey^2 + fxy = 0$. Если, например, $a = -1$, $f = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю, то получится простейшее уравнение гиперболы, показанное выше[5]. Уравнения для параболы, гиперболы, эллипса и окружности можно свести к так называемому *каноническому виду*, в котором останутся только два коэффициента (у параболы останется только один коэффициент). Еще эти кривые условно называют ***космическими***, так как планеты и их спутники летают по траекториям, близким к окружности или эллипсу. Так и говорят: эллиптическая орбита, круговая орбита… «Беззаконные» кометы часто движутся по гиперболе [2]. А на Земле за всеми этими «космическими телодвижениями» следят с помощью зеркал параболической формы оптических телескопов и радиотелескопов (см. сноску 2).

Эллипс и гиперболу, кстати говоря, можно построить по методике, показанной на

---

[4] Задавая два фокуса и значение параметра a, мы можем получить две окружности: одну для равенства $\frac{L1}{L2} = a$ и вторую для равенства $\frac{L2}{L1} = a$. Если к этим окружностям от фокусов прочертить по паре отрезков $L1$ и $L2$ так, как это показано на рисунке 2, то мы получим… два колеса и раму [4]. У Аполлона есть колесница, которую можно видеть на фронтоне Большого театра в Москве или на сторублевых купюрах. У Аполлония же есть, вернее, теперь есть… велосипед (a bicycle — «двухколесник»), который получается при построении четырех отрезков прямых и двух окружностей, названных в честь этого древнегреческого математика (262 до н. э. — 190 до н. э.). Он, кстати, ввел в обиход термин «гипербола». **Задание**: Построить «велосипед» Аполлония.

[5] Наш способ построения графиков сканированием плоскости годится и для работы с уравнениями кривых, заданных в виде $y = f(x)$ или $f(x, y) = 0$. Достаточно после слова if вставить не равенство отрезков, а уравнение исследуемой кривой, используя в нем не оператор «равно», а оператор «примерно равно» [4].

рис. 1. Нужно будет только отрезки, откладываемые циркулем и линейкой, делать не равными, а отличающимися на некую константу, называемую *эксцентриситетом* (ε) На рисунке 4 показано построение гиперболы, параболы и эллипса сканированием. У эллипса $\varepsilon < 1$, у параболы $\varepsilon = 1$, а у гиперболы $\varepsilon > 1$.

$\approx(a,b) := |a-b| < 0.001 \qquad ORIGIN := 0 \qquad n := 3000$

$x_1 := -2 \qquad x_2 := 2 \qquad y_1 := -0.4 \qquad y_2 := 2$

$x_F := 0 \qquad y_F := 1 \qquad Dir := 0.5$

```
(X)    := | i ← 0
(Y)       | for x ∈ x1, x1 + (x2 − x1)/n .. x2
          |   for y ∈ y1, y1 + (y2 − y1)/n .. y2
          |     | L1 ← sqrt((x − xF)^2 + (y − yF)^2)
          |     | L2 ← y − Dir
          |     | if | "Parabola"   ∨ | "Hyperbola"  ∨ | "Ellipse"
          |     |    | ε ← 1          | ε ← 3          | ε ← 0.5
          |     |    | L1 ≈ |ε·L2|    | L1 ≈ |ε·L2|    | L1 ≈ |ε·L2|
          |     |   | X_i ← x
          |     |   | Y_i ← y
          |     |   | i ← i + 1
          | (X)
          | (Y)
```

Булева алгебра

Или Ctrl+^

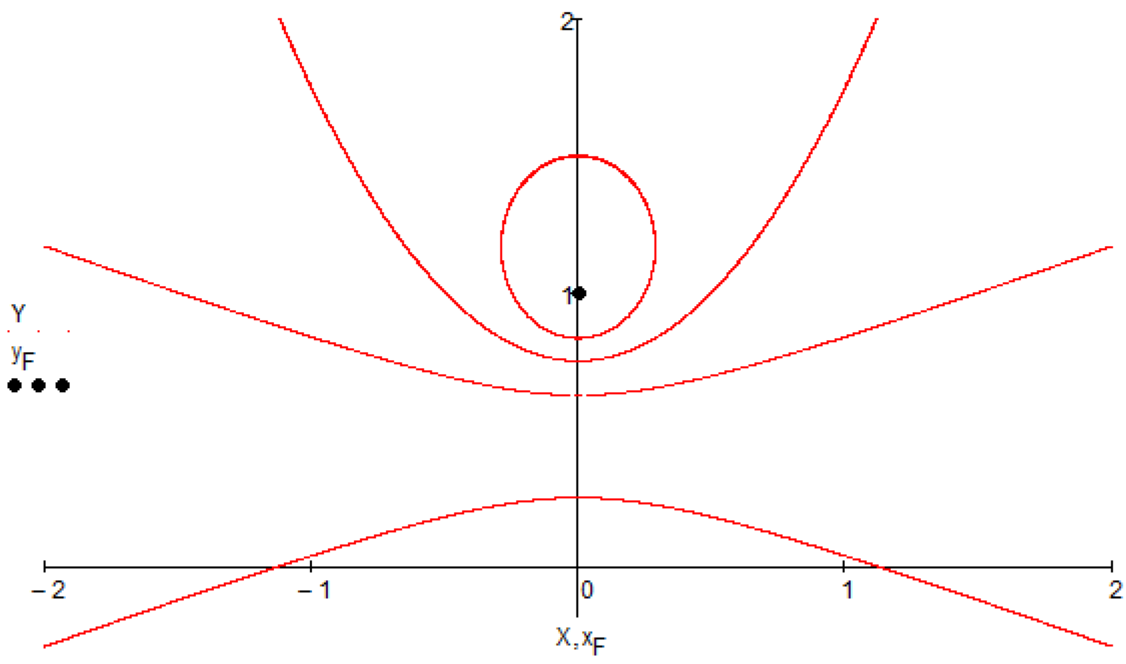

Рис. 4. Построение гиперболы, параболы и эллипса (анимация: https://www.ptcusercommunity.com/thread/140084)

Итак, гипербола — это *вычитание*, эллипс — *сложение*, а окружность — *деление*. Парабола же — это переходный случай от гиперболы к эллипсу, от вычитания к сложению. А какая геометрия скрывается за четвертым арифметическим действием — за *умножением*? Это так называемые ***овалы Кассини***, которые также несложно построить, используя нашу сканирующую методику. На рисунке 5 показаны эти овалы при фиксированных координатах двух фокусов и при трех разных значениях параметра a — произведения $L1$ на $L2$. Программу построения овалов Кассини мы не показываем: будет достаточно, как уже отмечено ранее, в программе на рисунке 3 знак вычитания заменить на знак умножения.

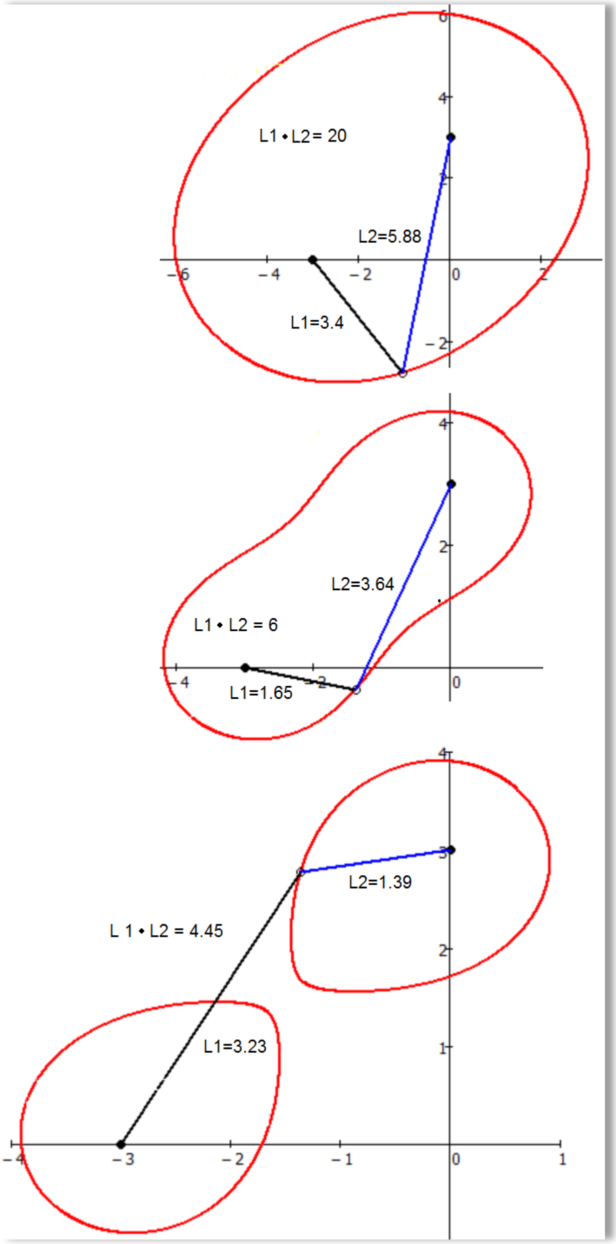

Рис. 5. Овалы Кассини

Овалом (слегка деформированным эллипсом[6]) замкнутую кривую на рисунке 5 можно

[6] Овалом (an oval) в англоязычной математической литературе называют любую замкнутую плоскую кривую. В русском же языке овал — это сугубо выпуклая фигура с гладкими краями. В доме математика, упомянутого в

назвать весьма условно. Уменьшение значения параметра *a* приводит к тому, что у этого овала появляется «талия» (см. центральную кривую на рисунке 5), которая при дальнейшем уменьшении значения параметра *a* «рвет» эту плоскую фигуру на две половинки. Анимация этого процесса напоминает деление живой клетки. Было время, когда полагали, что спутники вращаются вокруг планет не по эллиптическим орбитам, а по орбитам, подобным той, какая показана вверху рисунка 5 — по овалу Кассини. Вернее, велись дискуссии по этому поводу, в которых активно участвовал итальянский математик Джованни Доменико Кассини (1625 — 1712). Но в конце концов было доказано, что тут «работает» эллипс.

Кривые с двумя фокусами, о которых рассказано выше, всесторонне изучены [5]. Для них, в частности, найдены аналитические выражения, позволяющие строить эти кривые без «неэстетичного» сканирования. Но у подобных кривых может быть более двух полюсов. Вот тут-то и пригодится наше «дешевое, надежное и практичное» сканирование!

Но сначала давайте еще немного порисуем на бумаге, а не на экране компьютера.

Эллипс, как известно, можно нарисовать с помощью карандаша и веревочки, закрепленной с двух концов у фокусов эллипса. Этот нехитрый способ несложно применить для рисования замкнутой кривой и с тремя фокусами — см. рисунок 6.

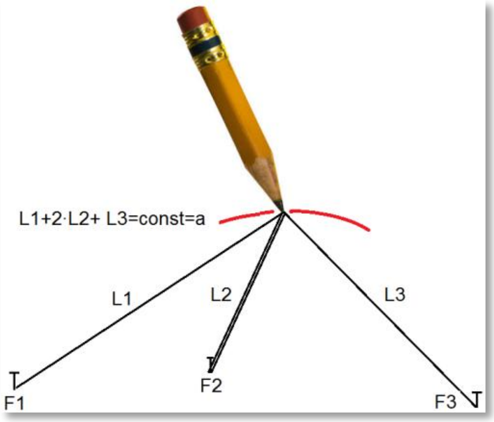

Рис. 6. Рисование эллипса с тремя фокусами

Задание: Построить эллипс с тремя и с более чем тремя фокусами

Можно предложить школьникам следующую **лабораторную работу, охватывающую алгебру, геометрию и информатику**.

На чертежной доске крепится ватман, на котором отмечаются три точки-фокуса *F1*, *F*2 и *F*3, куда втыкаются булавки. Веревочка одним концом завязывается на первой булавке в точке *F*1, перекидывается через грифель карандаша, перекидывается через булавку, воткнутую в точку *F*2, еще раз перекидывается через грифель карандаша и завязывается на

сноске 2, можно повесить овальное зеркало, сделанное в виде эллипса, большой и малый диаметры которого имеют пропорции золотого сечения.

третьей булавке в точке $F3$. Двигая карандаш и натягивая веревочку (а она у нас нерастяжимая: $L1 + 2 \cdot L2 + L3 = a$, где а — длина веревочки), рисуем некую кривую линию. Ее можно замкнуть, прорисовав кривую сверху и снизу фокусов. Все это аккуратно фотографируется и отправляется на экран компьютера, где оцифровывается: определяются координаты точек-фокусов и нескольких точек на кривой. Затем эта кривая строится на компьютере уже описанным нами программным способом. Завершается эта лабораторная работа сравнением двух кривых: реальной, продублированной на экране компьютера и на которой проставлены точки, и виртуальной, созданной по вышеописанным программам.

Наш способ черчения на бумаге замкнутых кривых можно усложнить — брать не три, а большее число фокусов и по-разному перекидывать веревочку через булавки и карандаш. Главное тут, чтобы силы трения веревочки о булавки не помешали плавному движению грифеля карандаша по бумаге. Если же сложение[7] заменить на умножение, то придется ограничиться только виртуальной кривой на экране дисплея. Пока еще никому не удалось нарисовать на бумаге кривую с несколькими фокусами и с опорой на произведение, а не на сумму. Но это, повторяем, несложно сделать на экране компьютера по нашей сканирующей методике. Вот мы наконец-то и подобрались к обещанному в заголовке *покемону* — объекту компьютерной сетевой игры, суть которой довольно примитивна: имеются «геометрические места точек» на карте мира, на плане города, которые играющие должны определить, т. е. «поймать покемона[8]». Игра незамысловатая, но вокруг нее бушуют такие общественно-политические страсти…

Овалы Кассини, в основе которых лежит произведение длин отрезков, также могут иметь более двух фокусов[9]. Располагая их в разных местах плоскости и задавая разные значения произведения, можно получить довольно сложные замкнутые кривые, оконтуривающие занимательные фигурки[10]. На рисунке 7 показаны три этапа трансформации овалов Кассини, обрисовывающих… покемона с девятью фокусами: уши, глаза, руки, ноги и пупок. Фокусы-глаза дополнительно обведены кружочками.

---

[7] Эллипсы (замкнутые кривые с суммированием) с более чем двумя фокусами называют ***k-эллипсами***. Впервые их исследовал для $k = 3$ немецкий философ, математик и экспериментатор Эренфрид Вальтер фон Чирнхаус (1651–1708) [4].

[8] На рисунке 4 можно узреть еще одного компьютерного «зверя» ─ жука.

[9] Тогда говорят о ***лемнискатах***. Наиболее известна двухфокусная лемниската Бернулли, где произведение длин отрезков равно квадрату половины расстояния между фокусами. В этом случае две половинки овала Кассини (см. рис. 5) касаются друг друга в точке.

[10] На авторской анимации, адрес которой отмечен на сайте статьи [6], показана лемниската с пятью фокусами, напоминающая высыхающее озеро: единый овал уменьшается в размерах, разбивается на отдельные водоемы, которые в конце концов превращаются в точки. Параметр этой анимации — значение произведения длин отрезков, изменяющееся от некой положительной величины до нуля.

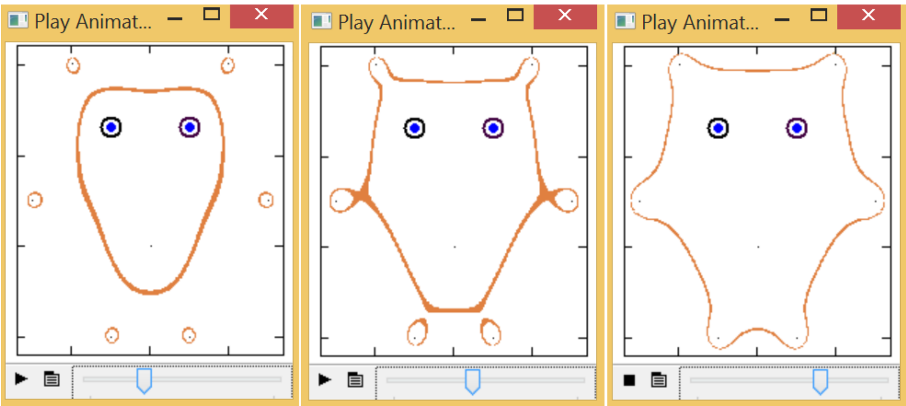

Рис. 7. Покемон Кассини (анимация https://www.ptcusercommunity.com/message/458980)

Выводы.

1. Сложные кривые можно рисовать примитивным сканированием прямоугольных областей. Так, кстати, поступает и сам компьютер, выводя на дисплей растровую картинку.

2. Сложные кривые можно попытаться сначала нарисовать на бумаге, а потом сравнить нарисованное с его компьютерным аналогом.

3. Виртуального зверя-покемона можно «поймать», не только бегая как угорелый со смартфоном по городам и весям, но и изучая алгебру, геометрию и информатику. Можно попытаться нарисовать и других «зверей», заложив в них несколько фокусов и разные алгебраические зависимости.

Интернет-источники

1. *Очков В. Ф.* История одного шедевра // Компьютерные инструменты в образовании. 2000. № 3–4. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Lace/Lace.htm

2. *Очков В. Ф., Боголомова Е. П., Иванов Д. А., Писачич К.* Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad, или Часы Кеплера // Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 2. 2015. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf

3. *Очков В. Ф., Соколов А. В., Калова Я., Чудова Ю. В.* Литературно-физическая композиция «Истории о зеркале и линзе» // Открытое образование. 2016. № 1. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mirror-Lens.pdf

4. *Очков В. Ф., Диаз Фалькони А.* Семь вычислительных кривых, или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf

5. *Савелов А. А.* Плоские кривые: систематика, свойства, применение. М.: Физматлит, 1960. http://www.vixri.ru/?p=3793