Cloud of Science. 2016. T. 3. № 3
http://cloudofscience.ru
ISSN 2409-031X

Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония[1]

В. Ф. Очков, А. Д. Фалькони***

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14*

***Высшая инженерная школа (Веракруз, Мексика)
96500, Мексика, Коацакоалькос, Веракрус, Юсто Сиера 1207*

e-mail: ochkov@twt.mpei.ac.ru, adiaz@esiapi.edu.mx

Аннотация. В статье предложены новые методы построения кривых, связанных в том числе и с вычислительными операторами сложения (эллипс), вычитания (гипербола), умножения (овал Кассини) и деления (окружность Аполлония). Исследованы свойства кривых по трем другим вычислительным операторам: возведение в степень, логарифм по заданному основанию и корень n-й степени. Подвергнута ревизии теория размерных величин — обоснована возможность и необходимость работы с размерными величинами в показателе степени.
Ключевые слова: плоские кривые, вычислительные операторы, графика Mathcad, размерность, анимация.

*Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые;
иначе такое бросание будет пустою забавою.
Козьма Прутков*

В школьные годы первого автора статьи многие мальчики мечтали стать космонавтами. В те времена Советский Союз «жил» космосом: запускались спутники Земли, Луну облетали зонды, человек поднимался в космос и т. д. Других особых научно-технических достижений мирового уровня у страны не было. Все это вызывало большой интерес к теории космических полетов, в частности, к небесной механике [1]. На школьных уроках математики, физики, астрономии учителя рассказывали, что спутники (естественные и искусственные) вращаются вокруг планет по круговым и эллиптическим орбитам и о том, как просто можно нарисовать этот самый *эллипс* — ненамного сложней, чем окружность (частный случай эллипса). Первый автор статьи после такого урока пришел домой, вбил в стену комнаты два гвоздика, привязал к ним веревочку, натянул ее карандашом и нарисовал на обоях половинку эллипса. Вторую половинку нарисовать не удалось — мать увидела эти «художества» и дала сыну нагоняй… Давайте попробуем дорисовать этот эллипс,

[1] Все расчеты, приведенные в статье, доступны на сайте: https://www.ptcusercommunity.com/thread/137467

но не на стене комнаты, а на экране компьютера в среде пакета Mathcad 15 — см. рис. 1.

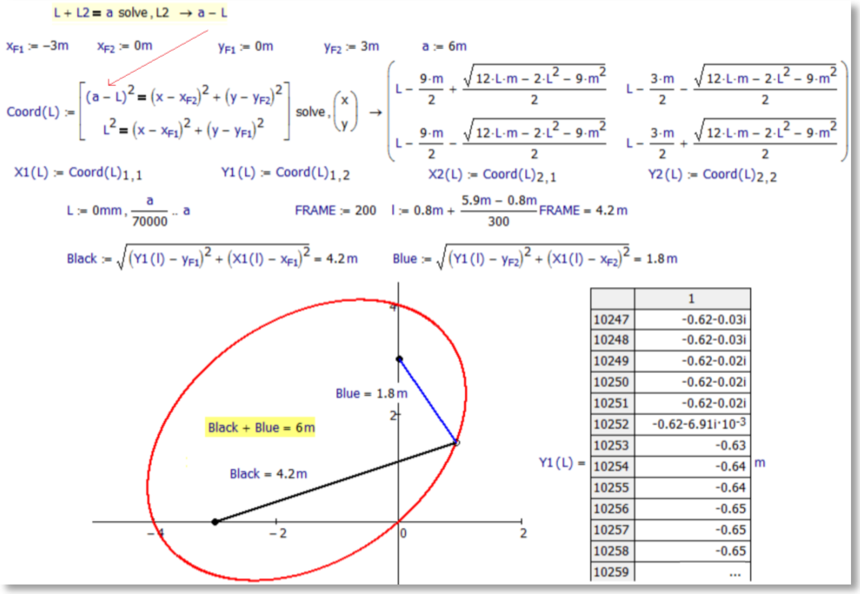

Рисунок 1. Эллипс — сложение (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/2089)

Можно взять алгебраическое выражение эллипса и использовать его для построения этой замкнутой кривой. А можно поступить иначе: вспомнить, что эллипс — это геометрическое место точек на плоскости, *сумма* расстояний от которых до двух других фиксированных точек (фокусов эллипса) постоянна. Эллипс и другие «вычислительные» кривые, о которых будет рассказано ниже, строились в среде Mathcad так. Решалась система двух нелинейных алгебраических уравнений — находились координаты точек, отстоящих от двух фокусов (их декартовы координаты $\mathbf{x_{F1}}$–$\mathbf{y_{F1}}$ и $\mathbf{x_{F2}}$–$\mathbf{y_{F2}}$) на расстояниях **L** (на графике **black** — отрезок черного цвета) и **L2** (**blue** — отрезок синего цвета; сам же эллипс у нас красный). В систему уравнений заложено «эллиптическое» равенство: **L + L2 = a** (при построении других «вычислительных» кривых мы будем менять вид этого равенства). У нашей системы два решения по двум неизвестным **x** и **y**, которые формируют матрицу с двумя строками (два решения) и двумя столбцами (две неизвестные системы). По этой матрице формируются четыре пользовательские функции с аргументом **L** и с именами **X1**, **X2**, **Y1** и **Y2**, по которым параметрически и поточечно строится сам эллипс. Переменная **l** (эль) — это фиксированное значение длины из переменной области **L** (range variable), при которой в эллипс вписываются два отрезка, сумма которых постоянна и равна заданному значению переменной **a** (6 метров — см.

рис. 1: запомним это, точнее, то, что переменная **a** равна не просто шести, а именно шести метрам). Авторская методика расчета, показанная на рис. 1, позволяет строить довольно сложные кривые без какого-либо предварительного вывода заложенных в кривые аналитических зависимостей. В этой методике сочетаются аналитические (символьные) и численные методы решения задачи.

Переменная **l** (эль) в нашем расчете на рис. 1 привязана к системной переменной **FRAME**, которая управляет *анимацией* в среде Mathcad [2]. Меняя значения переменной **FRAME** от нуля до, например, трехсот (кадры анимации), можно показывать, как… карандаш, удерживаемый веревочкой, рисует эллипс — см. начало статьи и анимацию здесь https://www.ptcusercommunity.com/videos/2089. Анимация рисования эллипса и других замкнутых кривых, описываемых в статье, расположена также на сайте статьи. Там же можно скачать соответствующие расчетные документы пакета Mathcad.

На рис. 1 показана также часть распечатки значений, которые выдает функция **Y1** при заданных дискретных значениях переменной **L**. Там есть действительные и комплексные числа. Последние получаются в том случае, если значения переменной **L** (аргумент функции **Y1**) не позволяют строить эллипс (**L > a**, например). Графика пакета Mathcad игнорирует эти значения и строит эллипс без проблем. Методы построения графиков, предложенные в статье, годятся и для построения замкнутых поверхностей, связанных с рассматриваемыми кривыми: эллипсоидов, гиперболоидов и т. д.

Эллипс на рис. 1 можно рассматривать как орбиту вращения одного небесного тела вокруг другого. Это вытекает из аналитического решения соответствующего дифференциального уравнения, учитывающего силы, действующие на небесные тела. Во времена развития небесной механики как раздела математики и физики были попытки аналитического решения задачи о трех и более небесных телах, подчиняющихся закону всемирного тяготения. Но общего аналитического решения так и не было найдено — были найдены решения только для некоторых частных случаев [1]. В этих поисках взоры исследователей обращались к *эллипсам с более чем двумя фокусами* — к центрам планет и спутников. Такие замкнутые кривые называют n-эллипсами или по имени человека, впервые их исследовавших, кривыми Чирнхауза (см. https://en.wikipedia.org/wiki/N-ellipse). Этот философ, математик и экспериментатор считается одним из изобретателей европейского белого фарфора, который в начале XVIII века стали производить в саксонском городке Мейсен недалеко от Дрездена. Можно предложить этой порцелановой фабрике, которая успешно работает и поныне, изготовить в честь Эренфрида Вальтера фон Чирнхауса (1651–1708) сувенирную фарфоровую тарелку с формой и рисунком, показанными на рис. 2.

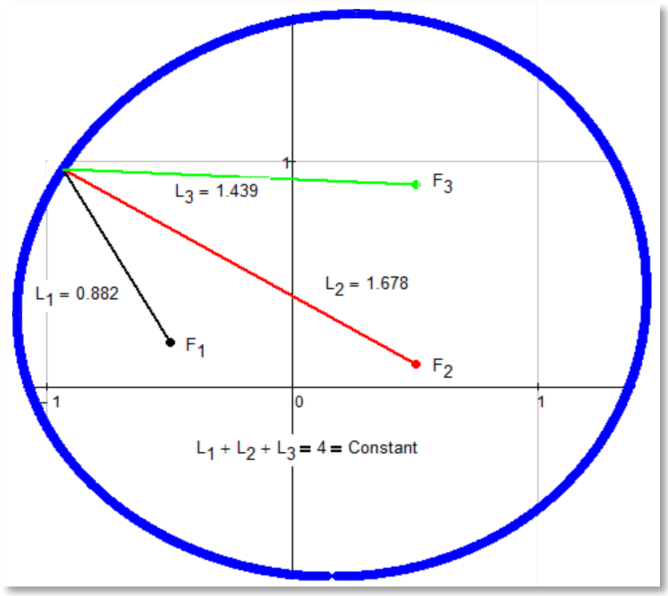

Рисунок 2. Эллипс с тремя фокусами (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7045)

На этой тарелке яйцеобразной формы (а эти кривые еще называют и яйцеобразными[2]), помимо трех фокусов и трех отрезков, сумма которых остается постоянной при рисовании голубой каемки тарелки, можно поместить и другую информацию[3]. Мы в свою очередь можем предложить еще один трехфокусный эллипс, который несложно нарисовать не только на экране компьютера, воспользовавшись методом на рис. 1, но и на … тех же обоях комнаты, вбив в стенку уже не два, а три гвоздя-фокуса (F_1, F_2 и F_3), привязав веревочку к двум гвоздям (F_1 и F_2) и перекинув ее особым образом через грифель карандаша и третий гвоздь (F_3) — см. рис. 3.

Можно справится в интернете, исследованы ли уже кривые, подобные той, малая часть которой показана на рис. 3, найдены ли соответствующие аналитические выражения для декартовых и полярных координат. Этой интересной работой при

[2] Можно «вбить несколько гвоздей в трехмерное пространство», «привязать к ним веревочку» и очертить некое тело в виде настоящего яйца. За работу, читатель!

[3] Сетка графика на тарелке напоминает… тюремную решетку. Это намек на то, что настоящим изобретателем европейского фарфора был не аристократ Чирнхаус, а алхимик Иоган Бёттгер, которого Чирнхауз держал под арестом в «шарашке», созданной специально под этот «фарфоровый проект». Чирнхауз же был директором этого закрытого учреждения — комендантом крепости, где располагался этот «почтовый ящик». Такая практика ведения научно-технических разработок два с лишним века спустя широко использовалась сталинским режимом. Из-за этого мы зачастую не знаем имен истинных изобретателей и авторов разработок, а помним и чествуем только «директоров шарашек».

желании может заняться читатель, увеличивая число фокусов и изменяя порядок перекидывания веревочки через них. Идем дальше.

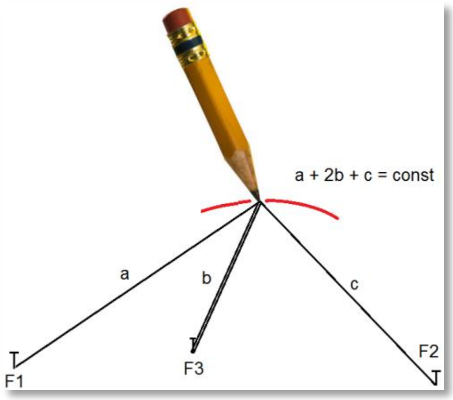

Рисунок 3. Рисование трехфокусного эллипса (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7060)

Если вместо суммы длин отрезков использовать *разность*, то будет построен не эллипс, а другая кривая второго порядка — *гипербола*: см. рис. 4. Она имеет две ветви. Одна из них соответствует разности **black–blue**, а вторая — разности **blue–black**. Объединить эти две разности позволяет оператор абсолютного значения (модуля). Но если не опираться на модуль, а работать с двумя разностями, то допустимо присваивать параметру **a** и отрицательные значения.

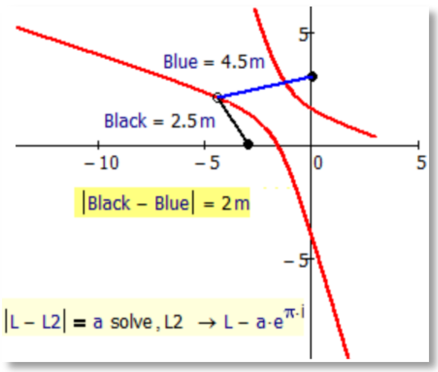

Рисунок 4. Гипербола — вычитание (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7035)

Если же работать не с суммой (см. рис. 1) или разностью (см. рис. 4), а с *произведением* значений отрезков **black** и **blue**, то можно получить так называемый *овал Кассини* — см. рис. 5.

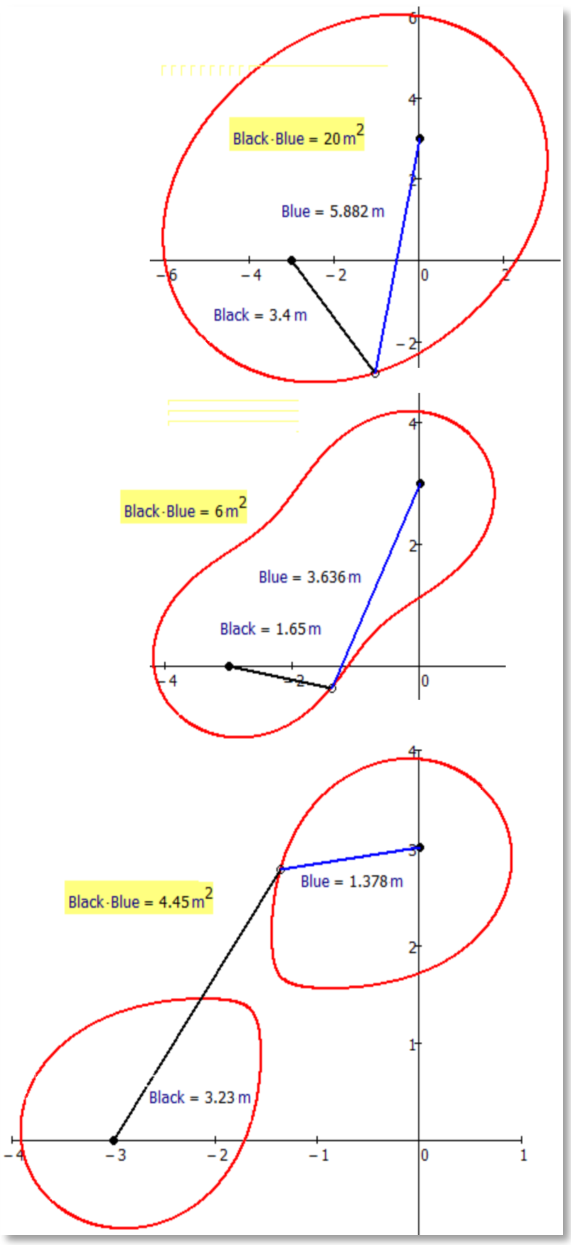

Рисунок 5. Овал Кассини (Cassini) — умножение (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7036)

Овалом (деформированным эллипсом[4]) замкнутые кривые на рис. 5 можно назвать весьма условно. Уменьшение значения параметра **a** (произведения длины отрезка **black** на длину отрезка **blue**) при фиксированных координатах фокусов приводит к тому, что у этого «овала» появляется «талия» (см. центральную кривую на рис. 5), которая при дальнейшем уменьшении значения параметра **a** «рвет» эту плоскую фигуру на две половинки. Анимация этого процесса напоминает деление живой клетки. Было время, когда полагали, что спутники вращаются вокруг планет не по эллиптическим орбитам (см. рис. 1), а по орбитам, подобным той, какая показана вверху рис. 5. Вернее, велись научные дискуссии по этому поводу, в которых активно участвовал и сам Кассини со своим овалом. Но в конце концов было доказано, что тут «работает» эллипс. Другая же возможная траектория движения небесных тел — это одна из ветвей гиперболы, показанной на рис. 4.

У овала Кассини как и у эллипса может быль более двух полюсов. Такие замкнутые кривые условно (см. ниже) называют лемнискатами («увитыми лентами»). Наиболее известна лемниската Бернулли, которая является частным случаем овала Кассини. У этого овала «нулевой объем талии», который имеет место, если произведение длин отрезков **black** и **blue** равно квадрату половины расстояния между фокусами.

На рис. 6 можно видеть эволюцию лемнискаты с тремя фиксированными фокусами при изменении значения параметра **a**.

Анимация, четыре кадра которой показаны на рис. 6, похожа на то, как на неровную поверхность наливают воду, формирующую отдельные лужи, которые постепенно сливаются в одну. Если же эту анимацию запустить в обратном порядке, то получится картина высыхания лужи. Подобные контуры можно наблюдать у… высыхающего Аральского моря, например.

Располагая разное количество фокусов в различных точках плоскости и задавая разное значение параметра-произведения **a**, можно получать довольно забавные картинки. Так, по адресу https://www.ptcusercommunity.com/thread/137953 можно видеть овалы Кассини с девятью фокусами, напоминающие … покемона — объекта одной сетевой компьютерной игры. Как все это строилось, мы расскажем в конце статьи (рис. 14).

Описание лемнискаты как многофокусного овала Кассини можно найти в Википедии. Правда, только в ее русскоязычном секторе. В других секторах (английском, немецком и др.) такого описания нет, что вызывает сомнения в таком толковании термина «лемниската». Обычно говорят о лемнискатах с двумя фокусами особого вида — лемниската Бернулли (см. выше), лемниската Бута и др.

[4]Овалом иногда (в англоязычной математической литературе) называют любую замкнутую плоскую кривую. В русском же языке овал, это нечто сугубо гладкое и выпуклое.

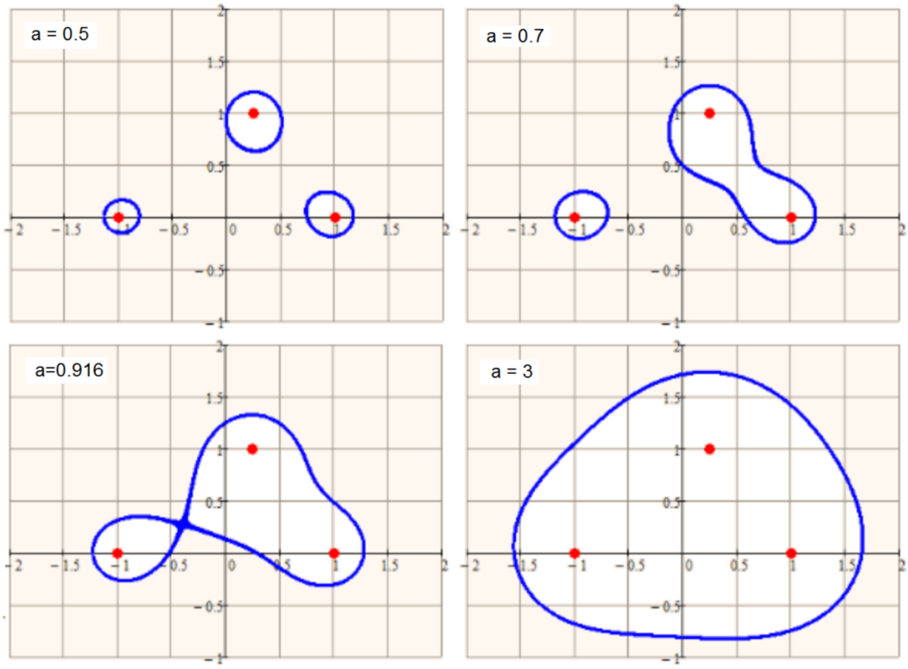

Рисунок 6. Трехфокусная лемниската (анимация с пятью фокусами https://www.ptcusercommunity.com/videos/7061)

Если фокусы эллипса (см. рис. 1) сместить в одну точку, то получится окружность. Но окружность можно построить и с двумя отделенными фокусами, используя не сложение отрезков, а их *деление* — см. рис. 7.

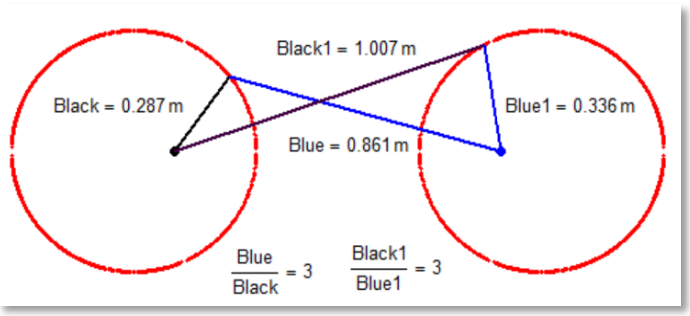

Рисунок 7. Окружности Аполлония — деление (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7040)

Одно из определений окружностей такое: окружность — это частный случай эллипса, при построении которого нужно опираться не на сумму отрезков (см. рис. 1), а на их деление. Такие окружности имеют имя — *окружности Аполлония*[5]. У окружности Аполлония как и у гипербола две «ветви», показанные на рис. 7. Эти две ветви-окружности получаются из двух дробей: прямой **black/blue** и обратной **blue/black**. Изображение окружностей Аполлония, на которое наложены их определяющие отрезки **black** и **blue**, напоминает… велосипед с рамой и двумя колесами: у Аполлона есть колесница (или квадрига — см. фронтон Большого театра в Москве или сторублевую купюру), а у Аполлония… велосипед — a bicycle (англ.), das Zweirad (нем.), двухколесник, «двухокружнник».

Кривые, показанные на рис. 1, 4, 5 и 7 (эллипс, гипербола, овал Кассини и окружность Аполлония) довольно хорошо исследованы [3–5]. Но давайте зайдем в еще не исследованную область, огороженную некими «красными флажками» — теорией размерных величин [6].

Арифметические операторы сложения, вычитания, умножения и деления, задействованные в решениях на рис. 1, 4, 5 и 7, имеют два операнда. В среде Mathcad 15 панель Calculator (рис. 8) кроме этих четырех операторов содержит еще три других вычислительных оператора с двумя операндами: *возведение в степень*, *логарифм с произвольным основанием* и *корень n-й степени*. Все эти семь операторов на рис. 8 выделены прямоугольниками.

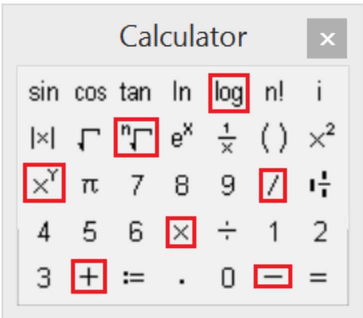

Рисунок 8. Панель калькулятора Mathcad 15

Возникла крамольная идея пропустить через расчет, показанный на рис. 1, и остальные три вычислительные оператора элементарной математики: степень, логарифм и корень, получив *великолепную семерку вычислительных кривых*. Но тут возникла одна проблема, вызвавшая бурную дискуссию у пользователей Mathcad, — см. https://www.ptcusercommunity.com/thread/137385.

Дело в том, что при построении кривых, показанных на рис. 1, 4, 5 и 7, была задействована *единица длины* метр. Обычно такие графики строят в безразмерных

[5] Этот древнегреческий математик, кстати, придумал и термин «гипербола» (см. рис. 4).

координатах — длина и все тут: никаких метров, сантиметров, футов или дюймов… Но пакет Mathcad оборудован инструментарием физических величин [7], которым было бы грешно не воспользоваться, например, для контроля правильности ввода формул. Ввел пользователь не ту степень у переменной — расчет без метров это «проглотит»[6] и выдаст ложное решение, а с метром прервет расчет и выдаст сообщение об ошибке. В наших расчетах на рис. 1, 4 и 5 параметр **a** был равен шести метрам (см. рис. 1 — эллипс), двум метрам (см. рис. 4 — гипербола) и 20, 6 и 0.45 квадратным метрам (рис. 5 — овалы Кассини). В расчете на рис. 7 параметр **a** был безразмерным, вернее, имел размерность метр, деленный на метр, но отрезки прямых, по которым строилась окружность Аполлония, по-прежнему имели «метровую» размерность.

Если же мы захотим построить замкнутую кривую с характеристикой **black** в степени **blue**, равной параметру **a**, то в среде Mathcad от единиц длины придется отказаться, т. к. расчет будет прерываться сообщением об ошибке — *показатель степени не может быть размерной величиной*. А собственно, почему мы не можем возводить что-то в размерную степень? Обычно тут следуют возражения в том плане, что нет задач, требующих этого. Но мы сейчас покажем одну такую задачу!

Пусть **2m**, возведенные в **3m**, даст в ответе 8 с размерностью, которую нужно еще обсудить. Пока сделаем допущение, что, эта единица измерения имеет символ $\mathbf{m^m}$. Но это не метр в степени метр, а некий новый символ, отображающий данную метрическую закономерность[7]. Основное возражение против размерной степени сводится, повторяем, к тому, что нет в природе таких физических величин. Но вот наша очередная замкнутая кривая, кривая где $\mathbf{black^{blue} = a}$, подсказывает, что это совсем не так и что мы можем что-то измерять единицей, где метр возводится в метр.

Кривая, показанная на рис. 9, похожа на овал Кассини с той лишь разницей, что две половинки новой кривой не симметричны, что четко видно в нижней части рис. 9. Эту несимметричность можно рассматривать как графическую иллюстрацию положения о том, что перестановка местами операндов оператора возведения в степень меняет результат. Следствием этого положения является и то, что замкну-

[6] Один участник дискуссии о вычислительных кривых Mathcad опубликовал кривую, построенную по ошибочному безразмерному расчету — в нем разность **a – L** и сама переменная **L** (см. третью строку на рис. 1) не были возведены во вторую степень. Ложный график был построен, но другой посетитель форума заметил эту ошибку. Но лучше, конечно, чтобы сам пакет замечал такие ошибки и не выдавал ложные решения.

[7] Ту нет ничего необычного. В математике и в математических пакетах некоторые операторы и символы нередко трактуются двояко. Выражение $\mathbf{x^T}$, например, в зависимости от ситуации может означать и переменную **x** в степени **T**, и транспонирование матрицы с именем **x**. Так что вполне будет обоснованным толковать $\mathbf{m^m}$ (или $\mathbf{cm^{cm}}$, $\mathbf{mm^{mm}}$, $\mathbf{ft^{in}}$ и т. д.) не только как единицу длины в степени единицы длины, а как нечто иное, делающее правильные пересчеты физической величины с такой размерностью.

тая кривая на рис. 9 имеет две ветви: первая для выражения $\mathbf{black}^{\mathbf{blue}}$ = **a**, а вторая — для выражения $\mathbf{blue}^{\mathbf{black}}$ = **a**. Изменение формы этих двух ветвей при изменении значения параметра **a** показано в анимации здесь https://www.ptcusercommunity.com/thread/137466.

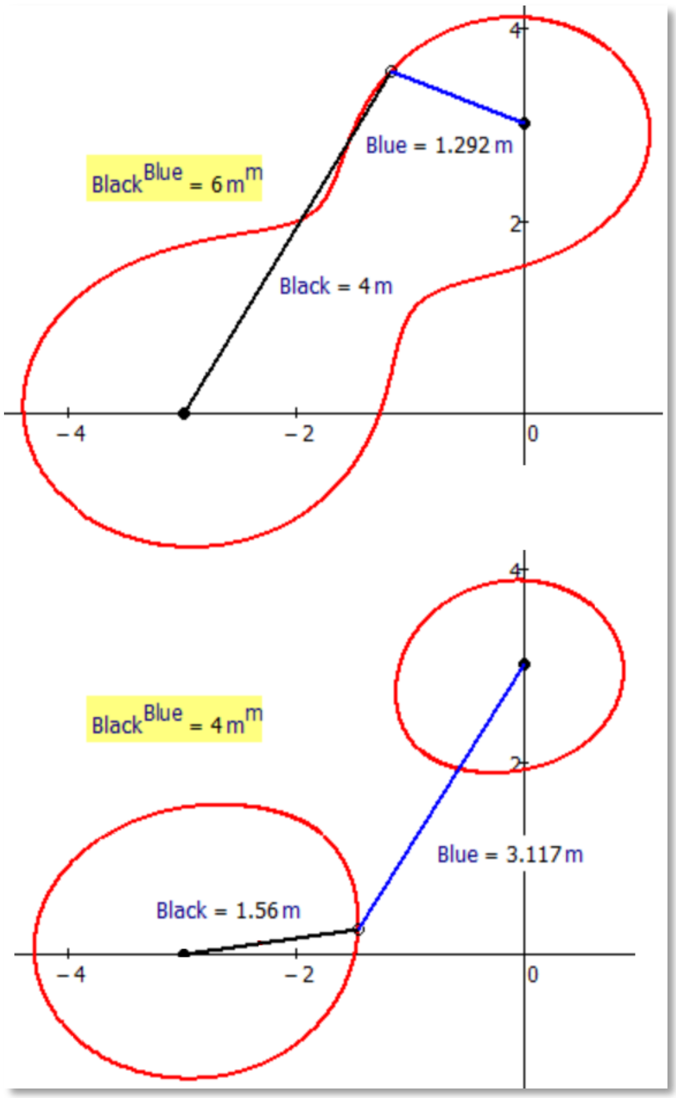

Рисунок 9. Кривая возведения в степень (анимация https://www.ptcusercommunity.com/thread/137466)

Можно попытаться «засунуть» метр не только в показатель степени, но и в логарифм. Тем более, что уже были прецеденты взятия логарифма размерной величины — см. рис. 10, где показано вычисление разности логарифмов двух размерных величин — давлений. А такая операция часто проводится в термодинамике.

$$log(10\ atm) - log(1\ bar) = 1.006$$

Рисунок 10. Логарифм размерной величины

Фокус расчета на рис. 10 в том, что не показано промежуточное вычисление логарифма дроби. Но этот пример тут не совсем уместен. Так что вернемся к нашим замкнутым кривым.

На рис. 11 показана кривая, отвечающая условию **log(black, blue) = a**. Тут у семерки (**a** = 7) совсем уж экзотическая единица измерения **log(m, m)**, которую также еще нужно уметь правильно толковать (см. выше).

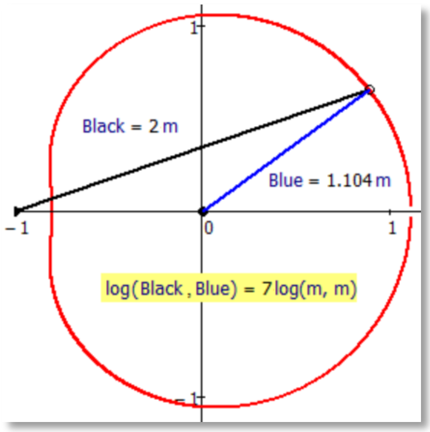

Рисунок 11. Кривая логарифма (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7042)

Кривая, показанная на рис. 11, также имеет две ветви: первая для выражения **log(Black, Blue) = a**, а вторая — для выражения **log(Blue, Black) = a**. Изменение формы этих двух ветвей при изменении значения параметра **a** показано в анимации https://www.ptcusercommunity.com/thread/137465. Тут, как и в случае с гиперболой, параметр **a** может иметь и отрицательные значения.

И, наконец, на рис. 12 показана седьмая кривая, отвечающая седьмому двухоперандному вычислительному оператору — взятию n-го корня числа. Но этот оператор подразумевает в среде Mathcad, что n — это целое число, большее единицы. Поэтому немного схитрили, заменив корень на степень с обратным показателем.

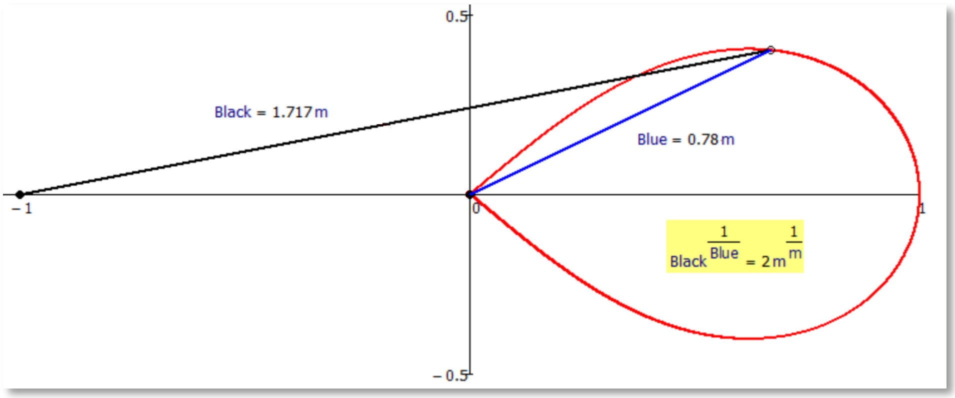

Рисунок 12. Кривая корня n-й степени (анимация https://www.ptcusercommunity.com/videos/7043)

Кривая, показанная на рис. 12, также имеет две ветви: первая для выражения **Black$^{1/\mathbf{Blue}}$ = a**, а вторая — для выражения **Blue$^{1/\mathbf{Black}}$ = a**.

Попытки авторов найти в литературе или Интернете подобные «незаконнорожденные» с точки зрения теории размерностей кривые (рис. 9, 11 и 12) не увенчались успехом. Может быть, читателям это удастся. Эти кривые, повторяем, требуют более глубокого математического анализа — нахождения алгебраических выражений, их описывающих, построения квадратур и проч., как это сделано для эллипса, гиперболы, овалов Кассини и окружностей Аполлония.

Начало такого анализа может быть таким. Если, например, нашу экспоненциальную кривую на рис. 9 определить через систему уравнений

$$eq(a,b,c) = \begin{bmatrix} b^2 = x^2 + y^2 \\ a^2 = (x-c)^2 + y^2 \end{bmatrix},$$

где $b = \ln(\kappa)/\ln(a),$ то она на может быть параметризирована так:

$$x = \frac{c^2 \ln(a)^2 - a^2 \ln(a)^2 + \ln(\kappa)}{2c \ln(a)^2}$$

и

$$y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2c \ln(a)^2},$$

где

$$\Delta = \ln\left(a^a a^c \kappa\right) \ln\left(\frac{a^a \kappa}{a^c}\right) \ln\left(\frac{\kappa}{a^a a^c}\right) \ln\left(\frac{a^a}{a^c \kappa}\right).$$

В полярных координатах это будет выглядеть так:

$$\cos\varphi = \frac{\rho^2 + c^2 - \kappa^{2/\rho}}{2\rho c}.$$

Обсуждение этого решения можно найти на сайте https://www.ptcusercommunity.com/thread/137356.

Вопрос о том, какую размерность и физический смысл должна иметь длина, возведенная в степень длины, остается открытым. Тем не менее, не дожидаясь окончательного решения этой метрологической проблемы, первый автор статьи собирается на своем дачном участке соорудить реальную, «физическую» клумбу по размерам, отображенным на рис. 13[8]. Эта клумба будет иметь реальные *физические* параметры: расстояние между фокусами, длину периметра, площадь и… наш параметр **a** — длину в степени длины. Физическая величина есть, а единицы ее измерения пока нет. Единица $\mathbf{m}^{\mathbf{m}}$, о которой говорилось выше, вызывает споры и сомнения, требует более детального токования. Но какая-то единица измерения тут должна быть, чтобы, в частности, вести пересчеты.

Представим себе, что кто-то в США захочет соорудить себе такую же клумбу, имея в руках рулетку, но не с *метрами и сантиметрами* на делениях, а с *футами и дюймами*. На какое другое число вместо четырех (см. рис. 13) ему нужно будет опираться? Это число также должно иметь размерность. Вопрос о ее виде и сути мы, повторяем, оставляем открытым. Более того, можно попытаться соорудить клумбу, где $\mathbf{black} + \mathbf{blue}^2 = \mathbf{a}$, но это будет уже явным нарушением закона размерных величин: нельзя складывать величину с ее квадратом. Наше же нарушение этого закона по отношению к степенной замкнутой кривой (см. рис. 9 и 13) не так явно. А вот другая сторона этой проблемы. В задачниках по математике можно увидеть такого рода задачи: решить квадратное уравнение типа $\mathbf{2x^2 + 3x - 4 = 0}$. При этом ни у кого не возникает мысль, что нельзя складывать квадрат величины с самой величиной. Тут имеется в виду, что коэффициенты при $\mathbf{x}^2$ и $\mathbf{x}$ содержат что-то такое, что позволяет делать такое сложение. Выражение $\mathbf{black} + \mathbf{blue}^2$, по которому нужно будет построить кривую, тоже может содержать некие единичные коэффициенты с размерностями, позволяющими складывать длину и ее квадрат (площадь).

[8] Клумба может быть размечена так. Вбиваются два колышка, фиксирующие фокусы этого «экспоненциального овала с талией». Далее на первой рулетке отмеряется отрезок **black** в метрах и вычисляется значение отрезка **blue** тоже в метрах по формуле **ln(4)/ln(black)**. На второй рулетке отмеривается полученное расстояние в метрах и вбивается первый колышек, намечающий контуры будущей клумбы. Операция повторяется с новым значением длины отрезка **black**, пока контур клумбы, отмечаемый колышками, не замкнется. Так, кстати говоря, сам «глупый» пакет Mathcad поточечно строил наши овалы и другие кривые. Человек же без компьютера в таких случаях начинает анализировать зависимости, искать асимптоты, нули и другие особые точки на графике и только после этого рисует в уме или на бумаге кривые качественно, а не количественно.

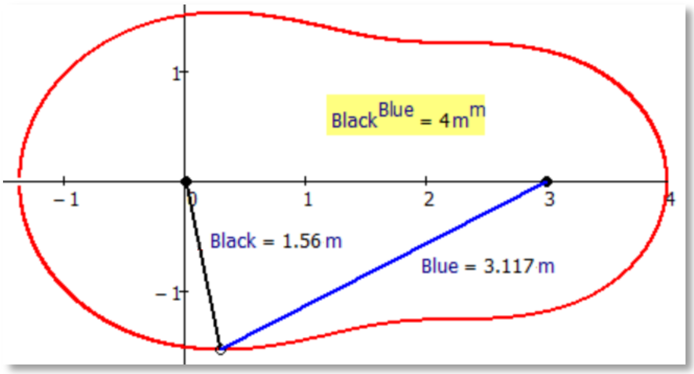

Рисунок 13. Экспоненциальная клумба

Вторая тема статьи такая: современные вычислительные средства позволяют отойти от изощренных и непонятных для многих алгоритмов построения кривых и вернуться к… истокам.

Вспомним, что такое окружность, эллипс, парабола, гипербола и проч., о чем было рассказано выше. Это геометрическое место точек на плоскости, отвечающих какому-то заданному признаку. Давайте же, не мудрствуя лукаво (а это мы делали, создавая расчет на рис. 1), просто-напросто запрограммируем это определение — просканируем ограниченную область плоскости, где могут находиться эти кривые, и отметим точки, отвечающие заданному признаку. На рис. 14 показано построение замкнутой кривой с тремя фокусами, расстояния от которых до кривой отвечает такому условию: **|Black + Blue – Green| = a**.

В расчете на рисунке 14 область на плоскости от заданных значений $\mathbf{x_1}$ до $\mathbf{x_2}$ и от $\mathbf{y_1}$ до $\mathbf{y_2}$ разбивается на отдельные точки, из которых собираются в двух векторах **X** и **Y** и выводятся на график только те, какие отвечают заданному свойству кривой. Но, не по условию «равно», а по условию «примерно равно», мы задачу решаем не аналитически, а численно и, следовательно, приближенно. Как говорил один киноперсонаж: «Это не эстетично, зато дешево, надежно и практично». Более «эстетичный» вариант расчета, использующий предварительный анализ зависимостей, и символьное (аналитическое) решение системы уравнений показан на первом рисунке статьи.

На рис. 14 мы получили некий гибрид эллипса и гиперболы — некую *эллипсо-гиперболу*, у которой от эллипса осталась замкнутость кривой, а от гиперболы — две ветви, одна из которых находится внутри другой.

$\approx(a,b) := |a-b| < 0.0001 \qquad ORIRIN := 1 \qquad n := 5000$

$x_1 := -2.2 \qquad x_2 := 0.2 \qquad y_1 := -1.2 \qquad y_2 := 1.2 \qquad a := 0.2$

$x_{F1} := -1 \qquad y_{F1} := 0 \qquad x_{F2} := 0 \qquad y_{F2} := 0 \qquad x_{F3} := 0 \qquad y_{F3} := -1$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } x \in x_1, x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{n} .. x_2 \\ \quad \text{for } y \in y_1, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{n} .. y_2 \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} Black \leftarrow \sqrt{(x - x_{F1})^2 + (y - y_{F1})^2} \\ Blue \leftarrow \sqrt{(x - x_{F2})^2 + (y - y_{F2})^2} \\ Green \leftarrow \sqrt{(x - x_{F3})^2 + (y - y_{F3})^2} \\ \text{if } |Black + Blue - Green| \approx a \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow i + 1 \\ X_i \leftarrow x \\ Y_i \leftarrow y \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$i := 80 \qquad Black := \sqrt{(X_i - x_{F1})^2 + (Y_i - y_{F1})^2} = 0.664$

$Blue := \sqrt{(X_i - x_{F2})^2 + (Y_i - y_{F2})^2} = 1.603 \qquad Green := \sqrt{(X_i - x_{F3})^2 + (Y_i - y_{F3})^2} = 2.067$

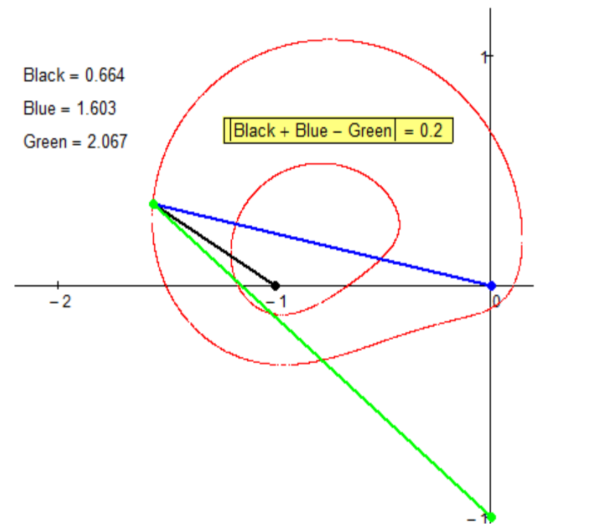

Рисунок 14. Универсальный метод рисования кривых по заданным условиям (анимация https://www.ptcusercommunity.com/thread/137779)

Эллипсогиперболой эту кривую можно назвать и потому, что при ее построении использовалась и сумма (эллипс), и разность (гипербола). На сайте https://www.ptcusercommunity.com/message/458540 можно увидеть в анимации, как эта кривая превращается в эллипс или гиперболу при плавном изменении ее параметров в ту или иную сторону.

«Практичность» же расчета на рис. 14 состоит в том, что его несложно преобразовать так, чтобы можно было работать с любым числом фокусов и любым равенством[9], задающим вид кривой. Это позволит создавать очень занимательные и поучительные кривые не только в «статике», но и в «кинематике» — в анимации. Что мы и сделали. Последний пример на рис. 15.

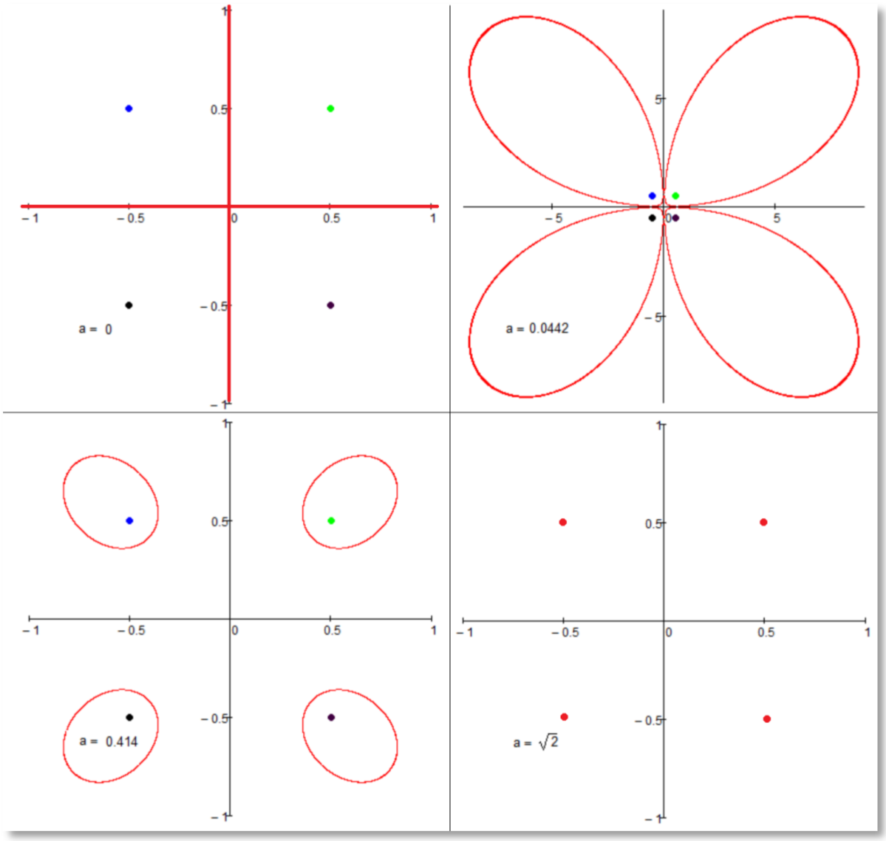

Рисунок 15. Четырехлистник (анимация https://www.ptcusercommunity.com/thread/137971)

Кривые на рис. 15 имеют четыре фокуса и отвечают равенству **|L1 – L2 + L3 – L4| = a,** которое опять же роднит их и с эллипсом (сумма) и с ги-

[9] Использование вместо равенств неравенств, кстати говоря, позволит строить не линии, а фигуры.

перболой (разность). При **a** = **0** мы имеем четыре ветви «гиперболы», которые слились с осями графика. При значении **a** больше нуля эта гипербола-крест сворачивается в четыре овала. При значении **a**, равном корню из двух, листочки этого четырехлистника сжимаются в точки.

Интересно также отображать наши кривые не только в декартовых, но и в полярных координатах. Если говорить о полярном графике, то тут в среде Mathcad также когда-то были перейдены некие «красные флажки»: в последних версиях этого пакета стало возможным отображать и отрицательные значения координаты-радиуса, что является довольно спорным моментом с точки зрения классической математики. Обычно полярные графики используют там, где аргумент меняется «по кругу» — от нуля до 360 угловых градусов. Типичный пример на рис. 16, где отображена самая простая «круговая», вернее, периодическая функция — синус.

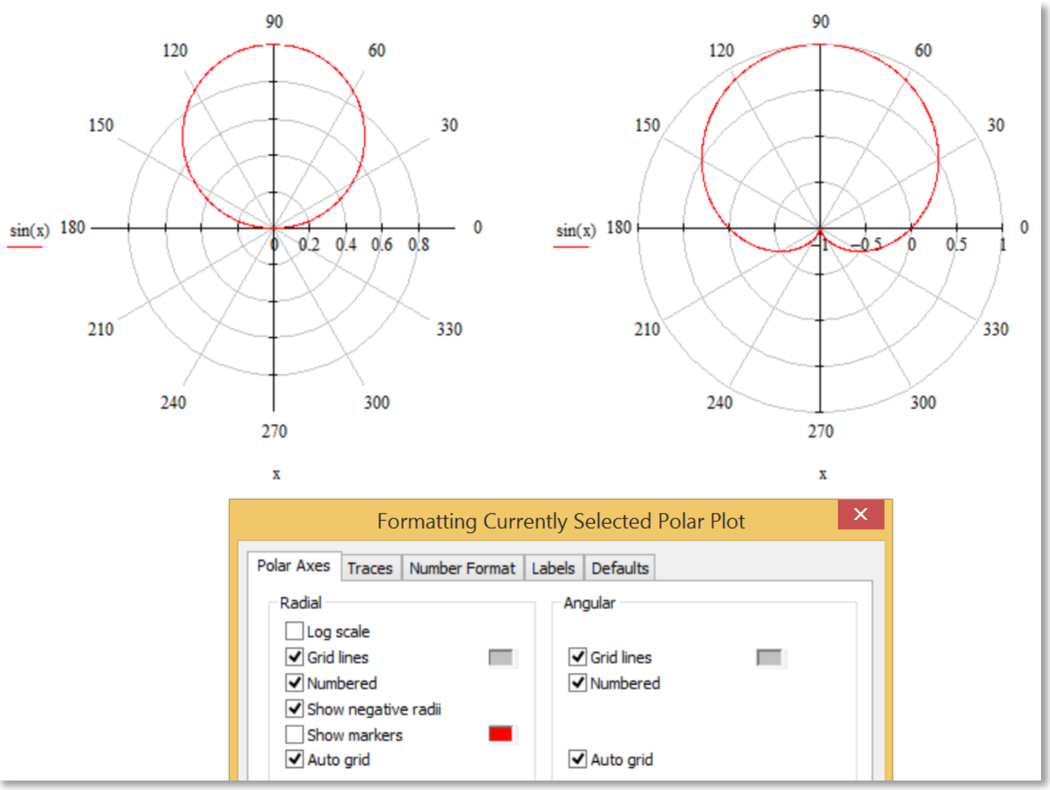

Рисунок 16. Синус в полярных координатах: слева — только с положительными радиусами-координатами, справа — и с отрицательными радиусами-координатами

В окне форматирования полярного графика пакета Mathcad появилась галочка Show negative radii (Показывать отрицательные радиусы), включение которой меняет вид графика синуса с окружности (это фактически не синус, а абсолютное значение синуса) на некое перевернутое сердечко (синус без модуля).

Если попытаться построить в полярных координатах нашу самую простую «вычислительную» кривую — окружность (см. ее декартов график на рис. 7), включив при этом опцию отрицательных радиусов, то можно получить довольно интересные графики — см. рис. 17.

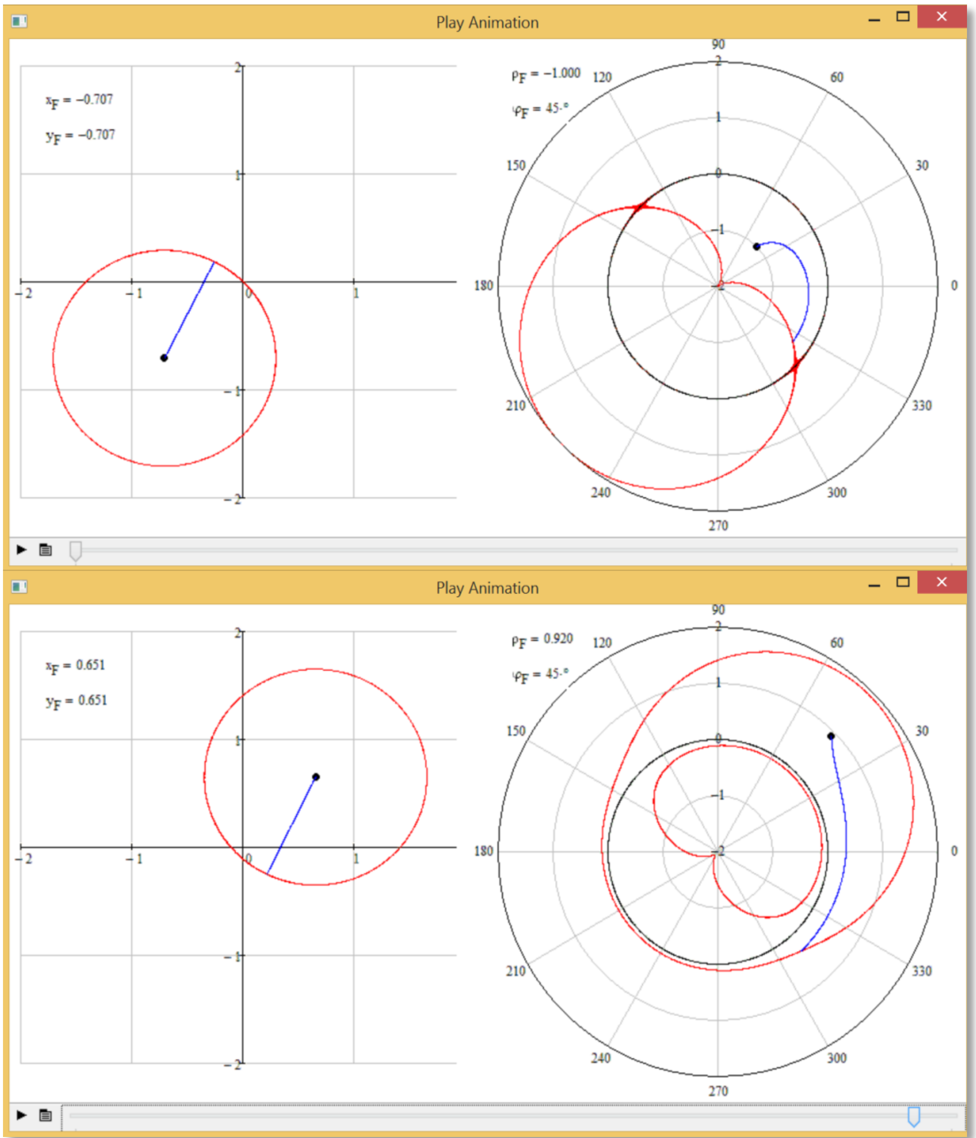

Рисунок 17. Окружность с разными координатами центра на декартовом и полярном графиках

Если же на полярном графике отключить опцию показа отрицательных радиусов, то сердечки и овалы (красные линии) превратятся в окружности, а их криволинейные радиусы (синие линии) выпрямятся, как это отображено на декартовом графике. Кроме того, пропадет вторая «фантомная» окружность. А почему фантомная!? У гиперболы, как известно, две ветви — см. рис. 4. Можно предположить, что и у окружности, эллипса и у других «вычислительных» кривых тоже имеется некомплексная (действительная) вторая ветвь, которую можно увидеть только на полярном графике, «перепрыгнув через красные флажки» — допустив отрицательные значения координаты-радиуса. Мы не даром упомянули здесь комплексные значения — рассмотренные в статье вычислительные операторы и функции, в частности, степень и логарифм имеют в комплексной области довольно сложные графики с несколькими ветвями, с периодичностью и проч.

Читатель может попробовать построить полярные графики шести других «вычислительных» кривых. В практической пользе этой работы можно сомневаться, но графики будут получаться весьма занимательными. А это главное в математическом образовании с использованием вычислительных пакетов.

Выводы. Современные математические пакты позволяют сочетать символьные и численные методы при построении кривых, в том числе и заключающих в себе различные аналитические закономерности. Возможно также переходить к истокам — к программированию самих геометрических определений кривых. Дополнив эти построения анимациями, можно наглядно показывать математическую суть кривых, что очень важно в образовательном процессе.

Предложены три новые плоские замкнутые кривые, которые в сочетании с четырьмя уже известными позволили выделить новую условную группу плоских замкнутых кривых — *вычислительных кривых*, основанных на семи основных двухоперандных операторах математики: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, логарифм и корень n-й степени. В этой семерке пять кривых имеют по две ветви.

Обоснована возможность и необходимость работы с размерными величинами в показателе степени и логарифме.

В настоящее время бурно развиваются образовательные технологии изучения физико-математических дисциплин с помощью компьютера. Данная статья — некий вклад в этот процесс.

Благодарности. Авторы благодарны Вернеру Эксингеру (Werner Exinger) за участие в обсуждении статьи и создании некоторых ее анимаций.

Дополнение. Когда статья была уже отмакетирована, авторы вспомнили, что есть еще один важный арифметический оператор с двумя операндами — остаток от деления. В среде Mathcad (и во многих других систамах) такая функция имеет имя **mod** (деление по модулю). Она, в отличие, например от возведения в степень (рис. 9), логарифма (рис. 11) и корня (рис. 12) не нарушает общепринятых правил работы с размерными величинами:

mod(1.5 m, 0.4 m) = 0.3 m.

Проверка:

(1.5 m – 0.3 m) / 0.4 m = 3 (целое число).

Уравнение **mod(x, y) = a** невозможно решить аналитически относительно переменной x или y. Поэтому данную кривую нельзя нарисовать по методике, показанной на рис. 1. Тут придется сканировать, чтобы построить кривые, отвечающее равенству **mod(Black, Blue) = a** (первая ветвь) и **mod(Blue, Black) = a** (вторая ветвь) — см. рис. 18.

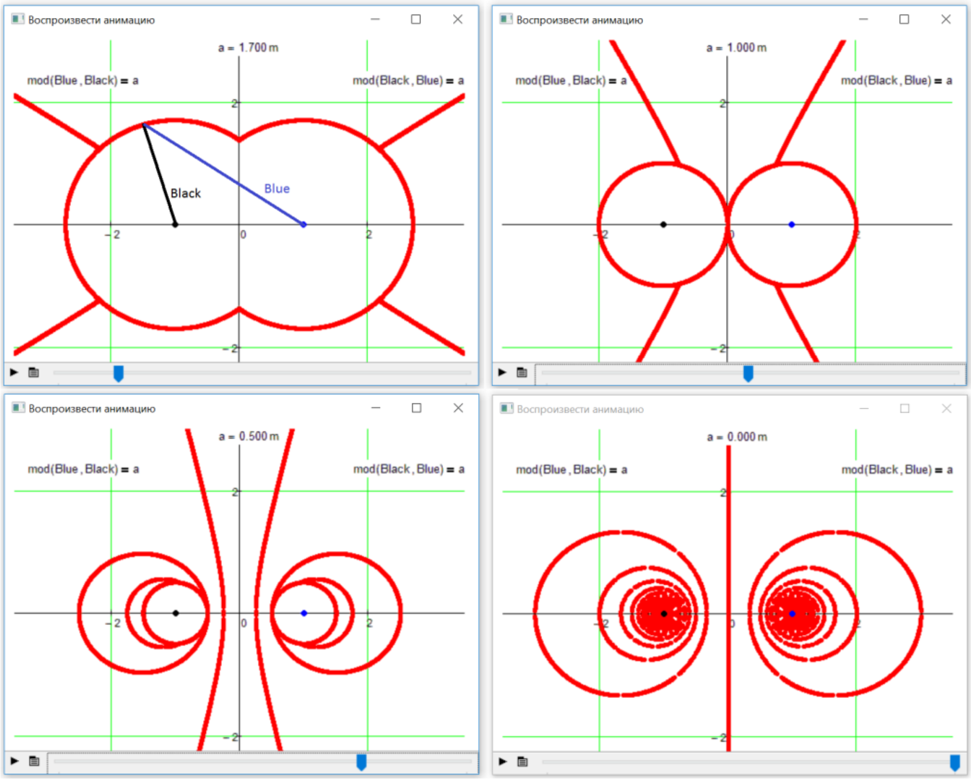

Рисунок 18. Кривые остатка от деления (анимация https://www.ptcusercommunity.com/message/468690)

Оператор взятия корня *n*-й степени (см. рис. 12), честно говоря, в статью вставлен не совсем обосновано, т.к. этот оператор является модификацией оператора возведения в степень (рис. 9). Поэтому «великолепная семерка» вычислительных кривых может выглядеть так: (1) сложение (эллипс), (2) вычитание (гипербола), (3) умножение (овал Кассини), (4) деление (окружность Аполлония), (5) остаток от деления (?), (6) возведение в степень (?) и (7) логарифм по заданному основанию (?). Две последние кривые можно считать кандидатами в «партию вычислительных кривых» из-за нерешенного «метрического вопроса».

Список вычислительных кривы можно дополнять. Читатель сам или со своими студентами может поэкспериментировать в этом направлении.

Литература

[1] *Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А., Писачич К.* Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // *Cloud of Science*. 2015. Т. 2, № 2. С. 177–215.

[2] *Очков В. Ф.* Живые кинематические схемы в Mathcad // *Открытое образование*. 2013. № 3. С. 27–33. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/kinematic.html)

[3] *Lawrence J. D.* Catalog of special plane curves. — Dover Publications, 1972.

[4] *Lockwood E. H.* Book of Curves. — Cambridge University Press, 2007.

[5] *Rutter J. W.* Geometry of Curves. — CRC Press, 2000.

[6] *Чертов А. Г.* Физические величины. — М. : Высшая школа, 1990.

[7] *Очков В. Ф.* Физические и экономические величины в Mathcad и Maple. — М. : Финансы и статистика, 2002. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Units/Forword_book.htm)

Авторы:

Валерий Федорович Очков — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры тепловых электрических станций, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

Альваро Диаз Фалькони — профессор, Высшая инженерная школа, Веракруз, Мексика

Seven computational curves or Apollonian bicycle

Valery F. Ochkov, Alvaro Diaz Falconi***

*National Research University MPEI
Krasnoznamennay str., 16, Moscow Russia 111250*

***Escuela Superior de Ingeniería Ambiental y Procesos Industriales
Coatzacoalcos, Veracruz, Mexico*

e-mail: ochkov@twt.mpei.ac.ru, adiaz@esiapi.edu.mx

Abstract. New methods of constructing curves of including with the addition of computational operators (ellipse), subtraction (hyperbole), multiplication (Cassini oval) and division (the circle of Apollonian) are described in the article. Given properties of curves with three other computational operators: exponentiation, logarithm to a given base and root of the n-th degree. To revise the theory of dimensional values - substantiated the possibility and the need to work with dimensional quantities in the exponent.
Key words: plane curves, computational operators, Mathcad graph, dimension, animation.

References

[1] *Ochkov V. F., Bogomolova E. P., Ivanov D. A., Pisachich K.* (2015) *Cloud of Science*, **2**(2):177–215. [In Rus]

[2] *Ochkov V. F.* (2013) *Otkrytoe obrazovanie*, 3:27–33. [In Rus]

[3] *Lawrence J. D.* (1972) Catalog of special plane curves. Dover Publications.

[4] *Lockwood E. H.* (2007) Book of Curves. Cambridge University Press.

[5] *Rutter J. W.* (2000) Geometry of Curves. CRC Press.

[6] *Chertov A. G.* (1990) Fizicheskie velichiny. Moscow. [In Rus]

[7] *Ochkov V. F.* (2002) Fizicheskie i jekonomicheskie velichiny v Mathcad i Maple. Moscow. [In Rus]