

Цепочка на цилиндре: число, символ, график

В. Ф. Очков

НИУ «МЭИ»

В статье приводится решение задачи о параметрах замкнутой цепочки (без кулона и кулоном), накинута на горизонтальный цилиндр. Решение сводится к численному поиску корня системы трансцендентных уравнений и к минимизации с ограничениями.

Дано описание сценария занятия в школе и вузе по образовательной технологии STEM(Science-Technology-Engineering-Mathematics).

Ключевые слова: замкнутая цепочка, горизонтальный цилиндр, функция, производная, длина кривой, центр тяжести кривой, система уравнений, потенциальная энергия, минимизация с ограничениями, Mathcad.

Сайт с расчетными документами статьи: <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/One-more-catenary/m-p/649328>.

Задача (цепочка без кулона): на горизонтальный цилиндр радиусом R накинута замкнутая цепочка длиной L (см. рис. 1). Определить форму провисания цепочки, длина которой, естественно, больше длины окружности цилиндра: $L > 2\pi R$.

Эта задача привлекательна и тем, что ее можно сформулировать не только словами, но и физически. Для этого достаточно прикрепить к доске в классе или студенческой аудитории цилиндрический диск (как нашлепку на холодильник), накинуть на него замкнутую цепочку, сфотографировать на цифровую камеру провисание цепочки, оцифровать изображение, обработать его на компьютере, а затем сравнить «цифру» с тем, что получится при математическом моделировании провисания цепочки (сравнить реальный объект с его цифровым двойником). Это будет прекрасная лабораторная работа по образовательной технологии STEM в компьютеризированном школьном или вузовском физическом кабинете (см. конец статьи).

На рисунке 1 показана схема задачи. В качестве начала координат выбрана точка, с нулевой абсциссой и отстоящая от центра окружности вниз на расстоянии h . Эта неизвестная величина наряду с двумя другими (x и a), описанными ниже, будет объектом

поиска. Важным параметром поиска будет и угол α – угол, при котором цепочка отрывается от цилиндра.

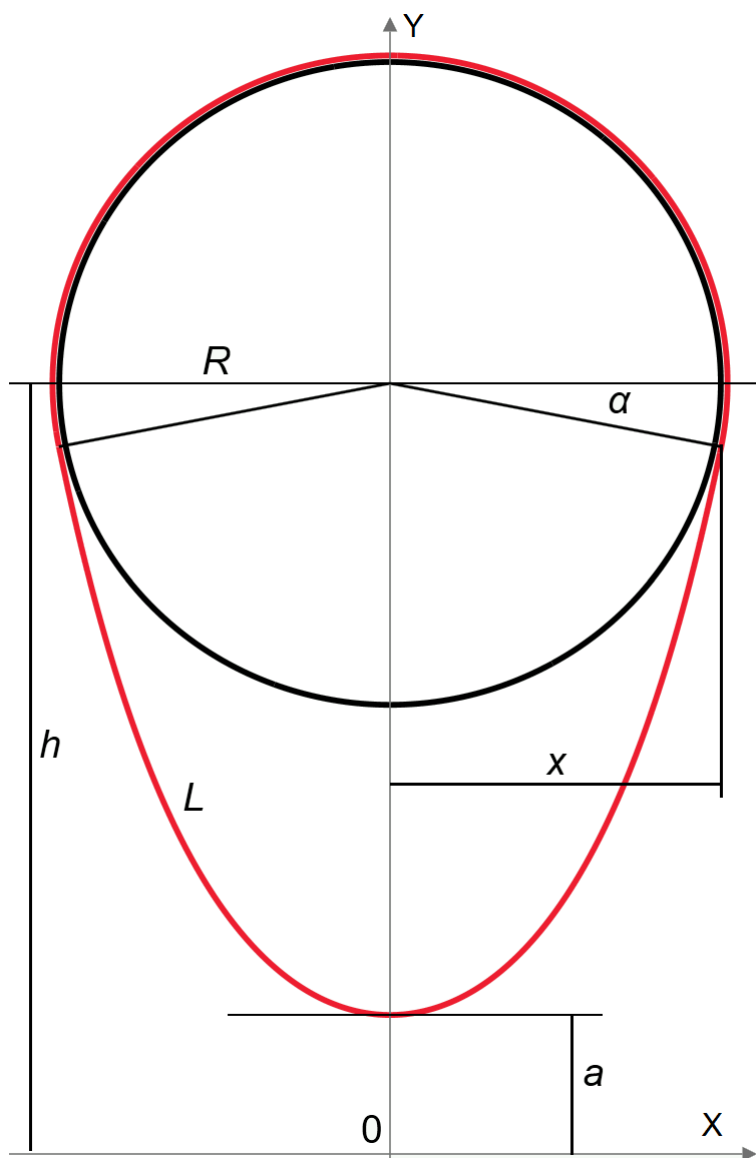


Рис. 1 Схема задачи о цепочке на цилиндре

В последнее время такие задачи все чаще и чаще решаются не аналитически («математический подход к решению» [1, 2]), а численно («инженерный подход» [3, 4]) с привлечением математических компьютерных программ — пакета Mathcad, например. Как в этой статье. И тому есть причины и оправдания. Аналитическое (символьное) решение зачастую оказывается неприемлемо громоздкими, требуют особого математического таланта, знаний и навыков, которых многим не хватает. Кроме того, аналитический подход нацелен на общее решение задачи. И из-за этого он часто терпит фиаско. Но даже если решение будет найдено, то оно часто оказывается слишком трудным для понимания теми, кто «не обладает особыми математическими талантами, знаниями и навыками». А этот

аспект очень важен в сфере образования, где цель (решение задачи, ответ) — ничто, а движение (путь к решению) — все.

Численные методы, получившие широкое распространение в последние десятилетия вследствие бурного развития вычислительной техники, позволяют довольно просто решать сложнейшие задачи. И решение это понятно широкому кругу людей, а не только избранным. Главное тут не забывать о недостатках численных методов, о накоплении ошибок вычислений и проч.

Читатель может попытаться решить задачу о цепочке на цилиндре аналитически, а потом сравнить его с численным, вернее гибридным решением (сочетание символьных и численных методов), приведенным ниже. На сайте статьи можно увидеть проект ордена с цепью тому, кто решит эту задачу аналитически – найдет формулу, по которой рассчитывается угол α в зависимости от отношения L к R . Орден тут упомянут неслучайно. Представьте себе такую ситуацию: человеку вручают орден, и он наклоняется, чтобы ему этот орден повесили на шею. Другая более обыденная ситуация – человек с цепочкой на шее наклонился, чтобы поднять что-то с полу. Так что с этой задачей приходится сталкиваться довольно часто.

На рисунке 2 показано, как в среде пакета Mathcad задаются шесть функций, необходимых для решения задачи.

$$F_c(x, a) := a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{Цепная линия}$$

$$F'_c(x, a) := \frac{d}{dx} F_c(x, a) \rightarrow \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{Производная цепной линии}$$

$$S_c(x, a) := \int_{-x}^x \sqrt{1^2 + F'_c(x, a)^2} \, dx \quad \text{Длина цепной линии}$$

$$F_o(x, R, h) := h - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{Нижняя полуокружность}$$

$$F'_o(x, R) := \frac{d}{dx} F_o(x, R, h) \rightarrow \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \text{Производная нижней полуокружности}$$

$$S_o(x, R) := \left\| \begin{array}{l} \alpha \leftarrow \arccos\left(\frac{x}{R}\right) \\ R \cdot (\pi + 2 \alpha) \end{array} \right\| \quad \text{Длина части цепочки, лежащей на цилиндре}$$

Рис. 2 Вспомогательные функции задачи о цепочке на цилиндре

Каноническая формула цепной линии, прописанная во всех бумажных и электронных математических справочниках и учебниках, такая $a \cdot \cosh(x/a)$. Она имеет минимум (провисающая цепь: $a > 0$) или максимум (арка: $a < 0$) в точке с абсциссой, равной нулю и ординатой, равной a (см. рис. 1). Значение этого параметра цепной линии (a это и ее некая «крутизна») нужно будет найти в процессе наших расчетов. Еще одна неизвестная — это переменная x : абсцисса точки отрыва цепочки от цилиндра (см. рис. 1). Таких точек две, но они симметричны относительно оси ординат.

Формула для длины цепочки, соприкасающейся с цилиндром (функция S_0), задается не через определенный интеграл (мы это сделали для цепной линии), а через нахождение значения локальной переменной α и расчета длины дуги окружности.

Примечание. Формула длины кривой во всех справочниках (см., например, https://en.wikipedia.org/wiki/Arc_length) дается с ошибкой — везде стоит под корнем просто единица, а должна стоять... единица в квадрате. «Какая разница, товарищ?» Единица равна единице в квадрате! Ан, нет! Квадрат у единицы позволяет понимать, что в этой формуле спрятана теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов!

И еще одно замечание. Определенный интеграл, задающий длину цепной линии от минус x до x , «так и просится», чтобы его упростили через нахождение первообразной. Такую работу сейчас все чаще и чаще делают не на бумаге и не в уме, а в... Интернете — см. рис. 2а.

WolframAlpha computational intelligence.

integral sqrt(1+sinh(x/a)^2) dx from x1 to x2

Input:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

Standard computation time exceeded... Try again with Pro computation time

integral sqrt(1+sinh(x/a)^2) dx

Indefinite integral:

$$\int \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = a \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) \tanh\left(\frac{x}{a}\right)} + \text{constant}$$

Рис. 2а Интернет-поиск первообразной функции

Определенный интеграл портал WolframАльфа не взял и отослал посетителя к платной версии портала (Pro). Но если порталу «подсунуть» неопределенный интеграл, то задача будет решена – см. последнюю строку на рис. 2а. После этого достаточно вспомнить основную теорему математического анализа – теорему Ньютона-Лейбница и получить нужную формулу длины цепной линии от минус x до x : $2a \cdot \cosh(x/a)$. Но в нашем расчете мы оставили исходную формулу с определенным интегралом. Во-первых, она более уместна в смысле понимания сути задачи, а во-вторых, мы все равно решаем задачу численно. Отказ от интеграла и переход к упрощенной формуле будет уместен при попытках аналитического решения задачи.

На рисунке 3 показано продолжение нашего Mathcad-расчета: ввод исходных данных и расчет важного параметра задачи – отношение длины цепочки L к длине окружности цилиндра $2\pi R$, на который цепочка накинута. Этот параметр может меняться от единицы (цепочка плотно облегает цилиндр: $\alpha = 90^\circ$ – см. рис. 1) до бесконечности (плети цепочки провисают у окружности почти вертикально: $\alpha = 0$).

$$\begin{array}{r}
 R \\
 (m) \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 L \\
 \hline
 2 \pi \cdot R + 2 \text{ m}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \pi \cdot R = 6.283 \text{ m} \\
 L = 8.283 \text{ m}
 \end{array}
 \quad
 \frac{L}{2 \pi \cdot R} = 1.318$$

Рис. 3 Исходные данные задачи о цепочке на цилиндре

Решение задачи сводится к численному поиску корня системы трех трансцендентных уравнений. Эта операция в среде Mathcad (блок Решить) показана на рис. 4: задаются разумные начальные приближения к решению, вводятся ограничения (это уравнения в данном случае, но там могут быть и неравенства) и вызывается встроенная в Mathcad функция **Find**, которая возвращает численные значения своих аргументов, превращающих уравнения в тождества. Вернее, почти в тождества, когда левые и правые части уравнений отличаются на незначительную величину. Численные методы решения задач имеют и другое название – приближенные методы.

Уравнения же такие:

- длина замкнутой цепочки L остается постоянной и складывается из двух частей: части, лежащей на цилиндре (S_o) и провисающей части (S_c);
- замкнутая линия, описывающая форму цепочки, охватывающей цилиндр (см. рис. 1), неразрывна ($F_o = F_c$ в точке отрыва цепочки от окружности);

- эта замкнутая линия гладкая ($F_o = F_c$ в точке отрыва цепочки от окружности).

Решить

Начальные приближения

$$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.9 R \\ 0.5 m \\ 2 m \end{bmatrix}$$

Ограничения

$$S_o(x, R) + S_c(x, a) = L$$

$$F_o(x, R, h) = F_c(x, a)$$

$$F'_o(x, R) = F'_c(x, a)$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(x, a, h) = \begin{bmatrix} 0.98698 \\ 0.39259 \\ 2.60187 \end{bmatrix} m$$

$$\alpha := \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = 9.255^\circ$$

Рис. 4 Решение задачи о цепочке на цилиндре

На рисунке 5 можно видеть графическое отображение решения задачи о цепочке на цилиндре для разных соотношений длин замкнутой цепочки и окружности цилиндра, на который цепочка накинута.

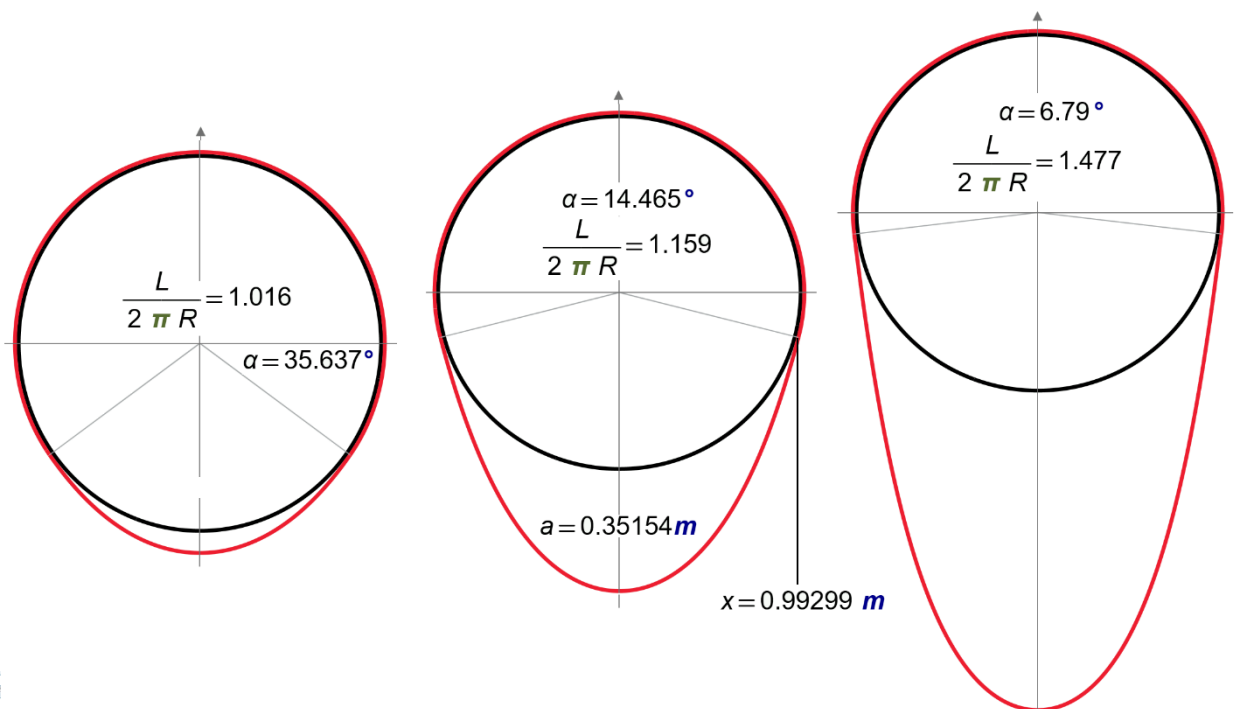


Рис. 6 Графическое отображение решения задачи о цепочке на цилиндре

Давайте теперь на цепочку подвесим кулон (или орден – см. выше) и посмотрим, как она будет провисать на цилиндре.

В новой задаче у нас будет не одна, а две цепных линии, сдвинутых влево и вправо от оси ординат на расстоянии Δx – см. рис. 7. Кроме того, начало координат перенесено в центр окружности.

$$F_c(x, a, h, \Delta x) := h + a \cdot \cosh\left(\frac{x + \text{if}(x \geq 0, m, \Delta x, -\Delta x)}{a}\right) - a$$

$$F'_c(x, a, \Delta x) := \sinh\left(\frac{x + \text{if}(x \geq 0, m, \Delta x, -\Delta x)}{a}\right)$$

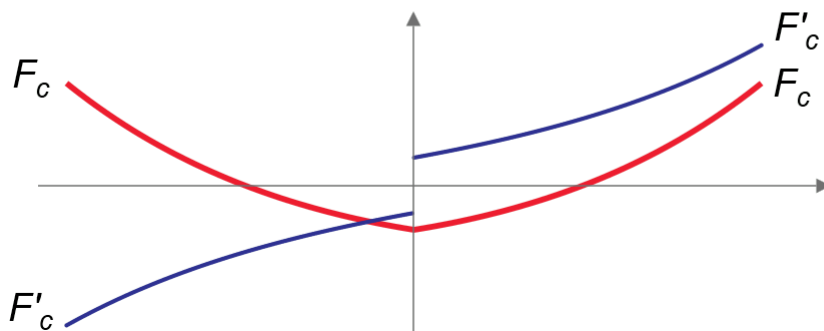


Рис. 7 Цепная функция с изломом

Для решения этой задачи к исходным данным нужно добавить две константы и две функции:

- удельную (линейную) массу цепочки m_c ;
- массу кулона m (значение ускорения свободного падения g вводить не нужно – эта величина встроена в Mathcad);
- функцию Y_{cg} , возвращающую ординату центра тяжести цепочки с кулоном (абсцисса этой точки равна нулю, т. к. задача о цепочке с кулоном остается быть симметричной относительно оси ординат);
- функцию PE , возвращающую потенциальную энергию цепочки с кулоном.

На рисунке 8 показаны эти две дополнительные функции.

$$Y_{cg}(x_1, x_2, a, h, \Delta x) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} F_c(x, a, h, \Delta x) \cdot \sqrt{1 + F_c'(x, a, \Delta x)^2} dx}{S_c(x_1, x_2, a, \Delta x)}$$

$$PE(x, a, h, \Delta x) := g \cdot S_c(-x, x, a, \Delta x) \cdot m_c \cdot Y_{cg}(-x, x, a, h, \Delta x) + g \cdot m \cdot F_c(0, a, h, \Delta x)$$

Рис. 8 Функции потенциальной энергии цепочки с кулоном

Функция Y_{cg} имеет два аргумента x_1 и x_2 , а не один x (см. рис. 2). Такое изменение нацелено на развитие задачи, на решение и ассиметричных задач (см. задания в конце статьи).

В задаче о цепочке с кулоном появилась четвертая неизвестная величина Δx (см. рис. 7). А уравнений осталось три. Разрешить эту «недоопределенность» (три уравнения с четырьмя неизвестными) можно, заменив функцию **Find**, на функцию **Minimize** – см. рис. 9: задача сводится к минимизации потенциальной энергии цепочки с кулоном. Четвертое необходимое уравнение запрятано в функции потенциальной энергии.

	Решить
Начальные приближения	$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta x \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.95 R \\ 0.7 m \\ -3 m \\ 0.7 m \end{bmatrix} \quad PE(x, a, h, \Delta x) = -1.257 J$
Ограничения	$S_o(-x, x, R) + S_c(-x, x, a, \Delta x) = L$ $F_o(x, R) = F_c(x, a, h, \Delta x)$ $F'_o(x, R) = F'_c(x, a, \Delta x)$
Решатель	$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta x \end{bmatrix} := \text{Minimize}(PE, x, a, h, \Delta x) = \begin{bmatrix} 0.97136 \\ 0.71686 \\ -2.53757 \\ 0.54537 \end{bmatrix} m$

$$PE(x, a, h, \Delta x) = -1.063 J \quad \alpha := \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = 13.746^\circ$$

Рис. 9 Решение задачи о цепочке с кулоном на цилиндре

На рисунке 10 показано графическое отображение решения задачи цепочке с кулоном, накинута на цилиндр, при разных значениях массы кулона: 1 кг, 20 граммов и 0 (цепочка без кулона). На рисунке 10 можно видеть пунктир цепной линии – продолжение реальной цепочки без излома. На левом рисунке цепная линия – это почти прямая линия: тяжелый груз вытягивает цепочку в струну. На среднем рисунке видны минимумы цепных линий при $x = -0.632$ м и $x = 0.632$ м. Правый же рисунок – это повторения рисунка 6. Но две цепные линии не слились в одну из за ограниченной точности численного метода решения задачи.

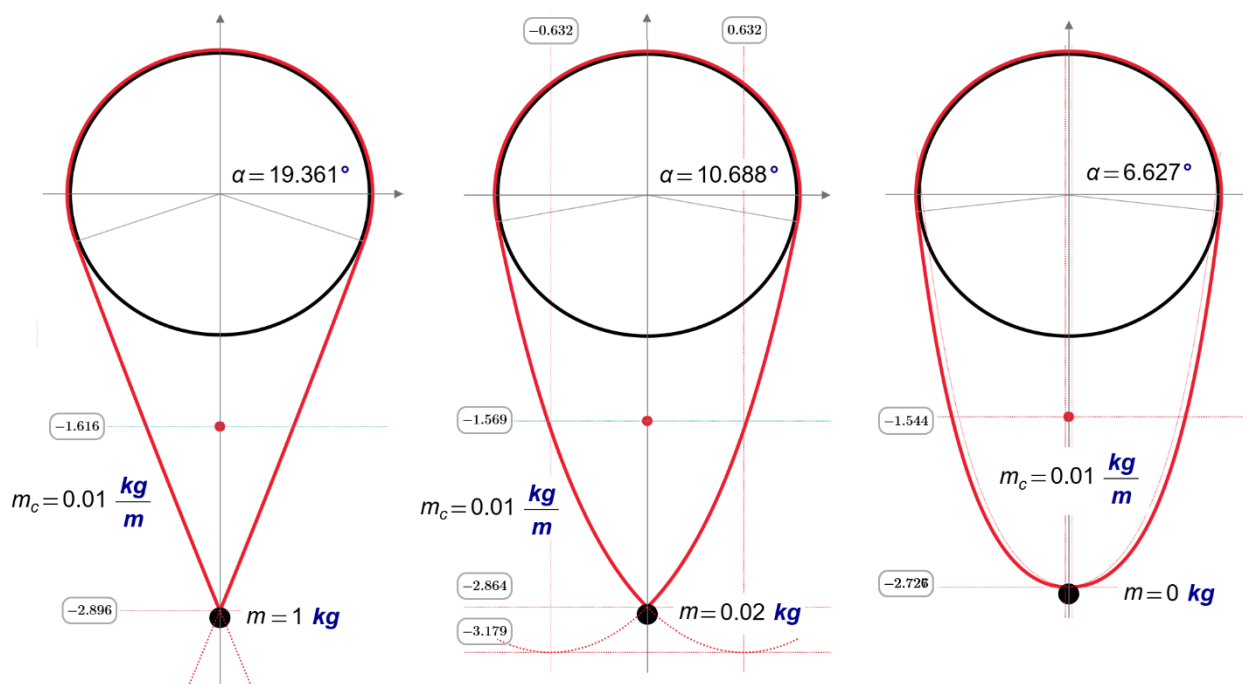


Рис. 10 Графическое отображение решения задачи о цепочке с кулоном на цилиндре

Рисунок 10 можно интерпретировать и так: с воздушного шара сбрасывают балласт, а потом от него совсем отрывается корзина. Тут мы имеем дело уже не с цепной линией, а с катеноидой – поверхностью, образуемой вращением цепной линии. Еще одна аналогия – мыльная пленка свисает с кольца, а в нижней ее части скопилась вода.

Закключение.

Данная статья – это фактически некий план проведения занятия в школе или вузе по инновационной образовательной технологии STEM, когда на одном уроке с опорой на современные информационные технологии рассматриваются вопросы разных учебных дисциплин: математики, физики, теоретической механики, сопромата и т. д. Для российского читателя тут более привычными будут термины "междисциплинарные связи" и "когнитивное обучение". Аббревиатура STEM идет от слов *Наука (Science)*, *Технология (Technology)*, *Инженерное дело (Engineering)* и *Математика (Mathematics)*. Иногда сюда добавляют букву *A — Art, Искусство*: STEAM, а не STEM. Проблема гуманитаризации технического образования – это важный аспект в работе школы и вуза [5].

Слово *steam* по-английски это и водяной пар, который в начале XIX века произвел в мире первую промышленную (теплотехническую) революцию: появились паровые машины, пароходы, паровозы... Технология обучения STEM/STEAM может способствовать развитию четвертой (цифровой) промышленной революции наших дней (Industry 4).

В немецком языке, кстати, в ходу другая аббревиатура, более точно обозначающая данную технологию обучения – MINT: M – *Mathematik*, I – *Informatik*, N – *Naturwissenschaft* (Естествознание) и T – *Technik*. Тут, как тому и положено, на первом месте стоит царица наук математика, получившая второе дыхание с развитием компьютерных символьных, численных и гибридных методов решения задач. Тандем математики и компьютера – это мощная база для нового этапа развития науки и техники. Слово *mint*, кстати, по-английски – это *мята*. Данная технология образования призвана *освежить* застоявшийся воздух в помещениях наших учебных заведений.

Слово *stem* по-английски означает и *стебель*, *ствол* (*stem cells* – стволовые клетки). В этом контексте STEM технологию образования можно считать неким стволом (каркасом), от которого отходят ветви отдельных учебных дисциплин – математики, физики, теоретической механики, сопротивления материалов и т. д. и т. п.

Дискуссии о роли компьютеров при освоении наук механико-математического плана часто вспыхивают в школах и вузах. Преподаватели тут высказывают крайние суждения на этот счет. Многие считают, что математику в школе и вузе нужно преподавать и осваивать сугубо «мелом на доске» и «ручкой на бумаге», и что компьютер тут может только навредить. Но тут приходится констатировать, что преподаватели, стоящие на такой крайней позиции, просто не освоили современные математические программы, а используют компьютер только для офисных целей: интернет, электронная почта, электронная книга, пишущая машинка, ведение электронного журнала... Девиз таких преподавателей: «Старую собаку новым фокусам не научишь!». Правда, они по понятным причинам этот девиз не афишируют и обосновывают свою позицию другими, более извинительными мотивами. Другие же преподаватели математики, физики, теоретической механики и др., освоившие компьютер до уровня своей специальности, используют его на занятиях наряду с «доской и мелом». И таких специалистов становится все больше и больше.

Второй вопрос, который присутствует в данной статье и прямо касается преподавания математики в школе и вузе таков: нужно ли уроки математики дополнять примерами из других дисциплин (из теоретической механики, например) или нужно преподавать сугубо чистую математику (с компьютером или без него), игнорируя прикладные задачи.

Ну и третье. В настоящее время процесс решения инженерных задач и задач математической физики сделал резкий крен от аналитических к численным методам (см. пример в этой статье). Но преподавание математики и физики в школе и в вузе по-прежнему базируется, в основном, на «аналитике», а не «цифре». Это также является темой дискуссий.

Недавно в СМИ промелькнула сообщение о том, что в старших классах Финляндии отменили предметы. Теперь урок в школе заточен не на разбор и освоение положений отдельных учебных дисциплин, а на решение конкретной практической задачи, на исследование конкретного объекта с привлечением положений всех учебных дисциплин, изучаемых в школе. Если говорить о данной статье, то этот объект всем хорошо известная цепочка, в которой сплелись физика, математика, сопротивление материалов, гидрогазодинамика, теплообмен и т. д.

Опыт ведения занятий по технологии STEM будет расширяться по мере роста числа преподавателей нужной квалификации и соответствующих разработанных и апробированных задач.

Рассмотренная задача о цепочке без кулона хороша тем, что в ней не нужно учитывать силу трения между цепочкой и цилиндром. А вот задачи, в которых эту силу необходимо учитывать, пренебрегая ею в отдельных случаях:

1. На цепочку подвешено два, три и т. д. кулона разной массы. К исходным данным прибавляются длины отрезков цепочки с местами крепления смежных кулонов.
2. Цепочка имеет переменную удельную массу. Это, к примеру, нитка жемчуга с перлами разной величины [5].

3. Цилиндр с накинута́й на него цепочкой с кулоном начинается вращаться вокруг своей горизонтальной оси. Определить угол поворота цилиндра, при котором цепочка начнет соскальзывать с него. Дополнительно задается некий коэффициент трения.
4. Цилиндр отклоняется от горизонтального положения. Определить угол наклона цилиндра, при котором цепочка начнет соскальзывать с него.
5. Цилиндр отклоняется от горизонтального положения, но цепочка закреплена на нем. Как будут меняться контуры этой уже асимметричной конструкции?
6. Замкнутая цепочка (с кулоном и без него) накинута не на круглый цилиндр, а цилиндр с эллипсом в сечении. Цилиндр вращается вокруг своей горизонтальной оси. Как будет меняться форма цепочки. Можно опробовать и другие формы сечения горизонтального цилиндра.
7. Цепочку с кулоном или без кулона отклонить в сторону и отпустить в свободный полет. Как будет колебаться этот маятник?

Другие сценарии занятий по технологии STRM можно найти в [6, 7].

Литература:

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980 (<https://dwg.ru/lib/1317>).
2. Зубелевич О. Э., Самсонов В. А. Цепь на конусе // Сб. науч.-метод. статей. Теоретическая механика. Вып. 30 / Под ред. В. А. Самсонова — М. : Изд-во МГУ, 2018. С. 131–138.
3. Очков В. Ф., Нори М., Очкова Н.А. Физико-математическая информатика с цепочкой // Cloud of Science. Том 6 №1, 2019. С. 5-47 (https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_21_005.pdf)
4. Очков В. Ф., Попова К., Камалов М. Цепная линия // Физика для школьников. № 3. 2018. С. 24-32 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_dlya_shkolnikov_2018_03.pdf)
5. Н. С. Лесков. Жемчужное ожерелье (<https://www.youtube.com/watch?v=DZPxQF4bkiI>)
6. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп.— СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 560 с.: ил. (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>)
7. Valery Ochkov. 2⁵ Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC. 2020. 374 pp. (<https://www.crcpress.com/2-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259>)