ISSN 2221-1993 • **Информатика в школе** • 2017 • № 4 (127)

В. Ф. Очков, Г. Н. Цуриков,
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва,

Ю. В. Чудова,
лицей № 1502 при Московском энергетическом институте

ОСТОРОЖНО: ЦЕПНАЯ ФУНКЦИЯ

Аннотация

В статье рассмотрено решение задачи о цепной линии на основе анализа в среде Mathcad потенциальной энергии механической системы.

Ключевые слова: цепь, потенциальная энергия, цепная функция, Mathcad.

Контактная информация

Очков Валерий Федорович, доктор тех. наук, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *телефон:* (495) 362-71-71; *e-mail:* ochkov@twt.mpei.ac.ru

Чудова Юлия Владимировна, методист лицея № 1502 при МЭИ, г. Москва; *адрес:* 111555, г. Москва, ул. Молостовых, д. 10А; *телефон:* (495) 300-00-20; *e-mail:* julia.chudova@gmail.com

Цуриков Григорий Николаевич, студент Национального исследовательского уни-верситета «МЭИ», г. Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *e-mail:* grishatsurikov9826@yandex.ru

V. F. Ochkov, G. N. Tsurikov,
National Research University MPEI, Moscow,

Ju. V. Chudova,
Lyceum 1502, Moscow

CAUTION: CATENARY!

Abstract

The article deals with the solution of the problem of the catenary on the basis of an analysis in Mathcad of the potential energy of the mechanical system.

Keywords: chain, potential energy, catenary, Mathcad.

Если взять в руки за два конца цепь, растянуть ее, показать провисание цепи школьникам и спросить их, на что это похоже с точки зрения математики, то большинство ребят скажут, что это парабола. И в этом нет ничего удивительного — даже Галилей так считал. И только полвека спустя, в конце XVII века, три великих математика — Иоганн Бернулли, Готфрид Лейбниц и Христиан Гюйгенс — почти одновременно и независимо друг от друга доказали, что это не так.

Так какая же функция описывает провисание цепи? Давайте для начала проведем такой физико-математический компьютерный эксперимент. Закрепим грузики (материальные точки) одного веса на невесомой и нерастяжимой нити — у нас получатся некие бусы или четки. Посмотрим, как все это будет провисать, если эту нагруженную нить закрепить в двух точках. Грузики будут стараться опуститься как можно ниже, чтобы их суммарная потенциальная энергия стала минимальной. Препятствовать их падению на пол будет нить, длины отрезков которой от грузика к грузику должны оставаться постоянными. Тут вырисовывается типичная *задача оптимизации* с ограничениями*, где:

- *целевой функцией*** будет суммарная потенциальная энергия грузиков, которую нужно минимизировать;
- *ограничениями* — постоянство расстояний между грузиками;
- *переменными оптимизации* — координаты грузиков.

На рисунке 1 показано решение этой задачи с помощью пакета Mathcad. Такую задачу приходится решать инженерам при проектировании висячих (цепных) мостов, где «грузики» — это полотно моста для пешеходов и транспорта.

Итак, вычислительный эксперимент.

Берется нерастяжимая и невесомая нить длиной 15 м (S), на которую нанизываются на равных расстояниях друг от друга девять (n) бусинок массой 1 кг ($mass$) каждая. Один конец нити подвешивается на высоте 7 м (y_0), а второй — на высоте 10 м (y_{10}). Расстояние по горизонтали между точками подвеса равно 10 м (x_{10}). Как провиснут эти «бусы»?

Задачу мы будем решать численно, а не аналитически. Поэтому всем исходным величинам — n, S, $mass$, x_0, y_0, x_{10} и y_{10} — мы задали конкретные значения: 9, 15 м, 1 кг, 0 м, 7 м, 10 м и 10 м соответственно — см. первую строку расчета на рисунке 1. Расстояния тут измеряются метрами, а не сантиметрами (что было бы естественнее для бус), потому что, во-первых, это не принципиально, а во-вторых, точность нашего расчета по умолчанию равна 0,001, т. е. 1 мм, если говорить о размерной задаче, где метр — это базовая единица длины. Переход на сантиметры потребует нарушения умолчания — например,

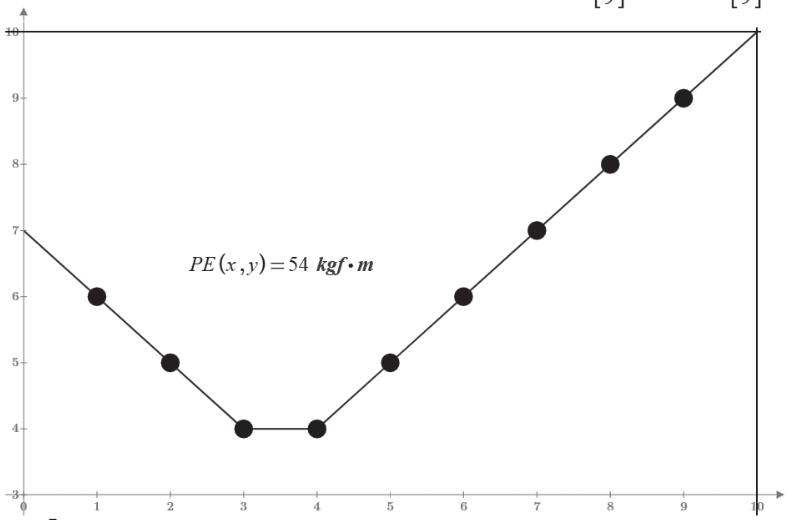
* В оптимизационных задачах требуется определить условия, при которых важная для нас информация принимает значение максимума или минимума.

** Решая оптимизационную задачу, нужно сразу выделять из нее три составляющие: переменные оптимизации (значения которых ищутся), целевую функцию (наша цель) и возможные ограничения на пути к цели.

$x_0 := 0\ \boldsymbol{m}$ $\quad y_0 := 7\ \boldsymbol{m}$ $\quad S := 15\ \boldsymbol{m}$ $\quad n := 9$ $\quad mass := 1\ \boldsymbol{kg}$ $\quad x_{10} := 10\ \boldsymbol{m}$ $\quad y_{10} := 10\ \boldsymbol{m}$

$$\Delta s := \frac{S}{n+1} = 1.5\ \boldsymbol{m} \qquad PE(x, y) := g \cdot mass \cdot \sum_{i=1}^{9} y_i$$

Первое приближение к решению $x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{m} \qquad y := \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}$



Решить

Ограничения

$$\Delta s = \sqrt{\left(x_0 - x_1\right)^2 + \left(y_0 - y_1\right)^2}$$ Длина первого звена цепи

$$\Delta s = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} \qquad \Delta s = \sqrt{\left(x_2 - x_3\right)^2 + \left(y_2 - y_3\right)^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{\left(x_3 - x_4\right)^2 + \left(y_3 - y_4\right)^2} \qquad \Delta s = \sqrt{\left(x_4 - x_5\right)^2 + \left(y_4 - y_5\right)^2}$$

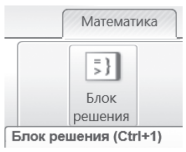
$$\Delta s = \sqrt{\left(x_5 - x_6\right)^2 + \left(y_5 - y_6\right)^2} \qquad \Delta s = \sqrt{\left(x_6 - x_7\right)^2 + \left(y_6 - y_7\right)^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{\left(x_7 - x_8\right)^2 + \left(y_7 - y_8\right)^2} \qquad \Delta s = \sqrt{\left(x_8 - x_9\right)^2 + \left(y_8 - y_9\right)^2}$$

$$\Delta s = \sqrt{\left(x_9 - x_{10}\right)^2 + \left(y_9 - y_{10}\right)^2}$$ Длина последнего звена цепи

Решатель

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}(PE, x, y)$$ Минимизация потенциальной энергии



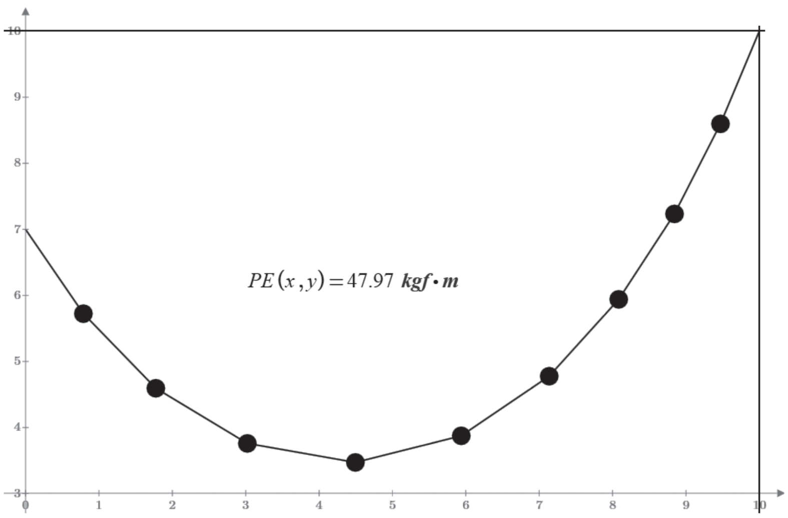


Рис. 1. Решение задачи о провисающих на нити грузиках

изменения точности расчета с 0,001 на 0,00001. Многие забывают это делать и получают неверный ответ.

Потенциальная энергия — это произведение веса груза на его высоту. В расчете она выражается через функцию с именем *PE* (potential energy). Из этой функции можно убрать константы *g* (ускорение свободного падения) и *mass* (масса каждого грузика). Решение при этом не изменится. Отсюда ***вывод:*** тяжелая металлическая цепь и легкая веревочка будут провисать одинаково и на Земле, и на Луне, если у них совпадают длины и координаты точек подвеса. Но мы специально оставляем величины *g* и *mass* в расчете, чтобы можно было, например, рассчитать геометрию цепи с грузиками разной массы (бусы, где центральная бусинка самая крупная, а остальные плавно уменьшаются к периферии) или цепи с подвешенным массивным грузом (канатная подвесная дорога). Эти решения можно найти на сайте статьи: https://www.ptcusercommunity.com/thread/136678.

Вторая особенность целевой функции *PE* связана уже не с физикой задачи, а с особенностями ее решения в среде Mathcad. Функция *PE* имеет два аргумента-вектора — x и y, а зависит только от одного — от y. Такой записи требует сам пакет Mathcad: если оптимизация ведется по двум переменным, то целевая функция также должна иметь две переменные-аргумента — не больше и не меньше. Поэтому пришлось ввести в функцию *PE* дополнительный фиктивный аргумент x. Но фактически оптимизация у нас будет вестись не по двум переменным, а по 18 — по девяти значениям в векторе x и по девяти значениям в векторе y. Задача получается довольно сложная. Это выражается, в частности, и в том, что Решатель пакета Mathcad 15 с ней не справился, но новый Решатель пакета Mathcad Prime под названием Artelys Knitro (https://www.artelys.com/en/optimization-tools/knitro) задачу решил (см.: https://www.ptcusercommunity.com/thread/136739).

Еще один вычислительный, вернее, оформительский нюанс задачи. В расчете на рисунке 1 переменные x_0, y_0, x_{10} и y_{10} — это не элементы векторов x и y, а скалярные переменные с индексами 0 и 10. Но в расчете есть и одноименные векторы x и y, хранящие координаты девяти грузиков.

После ввода исходных данных и целевой функции необходимо дать первое приближение для переменных оптимизации: для двух векторов x и y — координат центров грузиков. Здесь нужно помочь компьютеру: дать такие первые приближения, чтобы они были близки к реальности, — см. первый график на рисунке 1. В центре графика показан подсчет потенциальной энергии грузиков (54 кг-силы на метр) при таком их расположении. Нужно сделать так, чтобы эта энергия стала минимальной, но выполнялись бы ограничения по геометрии цепи. Это делает блок *Решить*, показанный на рисунке 1 сразу после первого графика, где в области ограничений записаны 10 равенств: длины отдельных участков нити, соединяющих грузики в цепь (в нитку бус), должны быть равны Δs. Функция *Minimize* по-особому численному алгоритму меняет значения элементов в векторах x и y так, чтобы функция *PE* приняла минимальное значение, а ограничения бы выполнялись. Нижний график на рисунке 1 показывает, что наша задача вроде решена: грузики провисли правильной цепью, а их потенциальная энергия снизилась до 47,97 кг-силы на метр. Проверить выполнение ограничений несложно, достаточно вывести значения 10 выражений с квадратными корнями, записанных в области ограничений решателя Mathcad. Все они должны быть равны значению 1,5 м (Δs) с точностью до миллиметра. Труднее показать, что энергия нашей механической системы достигла «дна» потенциальной ямы. Это можно сделать, вспомнив, что «нет ничего практичней хорошей теории»: нужно уточнить, что такое цепная линия и какая ее формула, — см. рисунки 2, 3.

На рисунке 2 показан авторский сайт Интернета, созданный по технологии Mathcad Calculation Server, позволяющей работать в среде Mathcad без установки на компьютер самого пакета — достаточно, чтобы компьютер имел выход в Интернет. На сайте нужно ввести значения h_1, h_2, L и S (7, 10, 10 и 15 метров), нажать кнопку *Recalculate* и получить ответ — значение параметров цепной функции x_0, h и a, проходящей через две заданные точки и имеющей заданную длину. Сама же цепная функция включает в себя не параболу, а гиперболический косинус cosh*. Дополнительно на сайте прорисовывается сама цепная линия, в формуле которой h — это ордината нижней точки цепи, а x_0 — ее абсцисса. Задача сводится к решению системы трех нелинейных алгебраических уравнений блоком Given-Find пакета Mathcad 15. Само же уравнение цепной линии выводится через решение дифференциального уравнения, полученного в результате анализа сил, действующих на элементарный участок цепи (см. эти аналитические выкладки, например, здесь: http://www.math24.ru/уравнение-цепной-линии.html).

Оценка правильности нашего решения, основанного на анализе потенциальной энергии механической системы, отображена на рисунке 3: грузики (их уже не 9, а 25) пронизывают цепную линию. На рисунке 3 дополнительно прорисована парабола, проходящая через точки подвеса нити и через нижнюю точку. С параболы мы начали эту статью. Видно, что цепь провисает не по параболе, но близко к ней.

Примечания.

1. Параметр a в уравнении цепной линии характеризует ее «крутизну» и характер. Если значение a уменьшить от некоего положительного значения (см. рис. 2, 3) почти к нулю, то цепь будет стремиться к прямой линии (к натянутой струне), а потом (при отрицательных значениях a) превратится в... арку. Такую арку, кстати, можно получить, если в расчете на рисунке 1 функцию *Minimize* заменить на функцию *Maximize*, — см. рисунок 4, где грузики уже не грузики, а... воздушные шарики, наполненные гелием. Здесь потенциальная энергия не минимизируется, а «максимизируется».

2. В литературе обычно приводится канонический вид цепной функции с одним параметром a и без минус единицы. Но для практических целей используют функцию с тремя аргументами — см. рисунок 2.

В решении на рисунке 4 мы имеем только одно ограничение, но в виде... цепи операторов равенства. Цепь, так сказать, решается с помощью цепи. Кроме того, был убран квадратный корень, что должно ускорить расчет.

Цепь и арка в виде перевернутой цепи имеют то свойство, что на их элементы действуют только силы растяжения (цепь) или сжатия (арка). Там нет изгибающих сил.

---

* Гиперболический косинус $\cosh(x)$ или $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$. Древние греки знали число π, параболу и тригонометрические функции, но не знали числа e (основание натурального логарифма 2,71828...), экспоненты и гиперболических тригонометрических функций, которые были открыты уже в Новое время — во время «ренессанса» математики. Современные студенты фактически изучают высшую математику по учебникам, написанным в те времена.

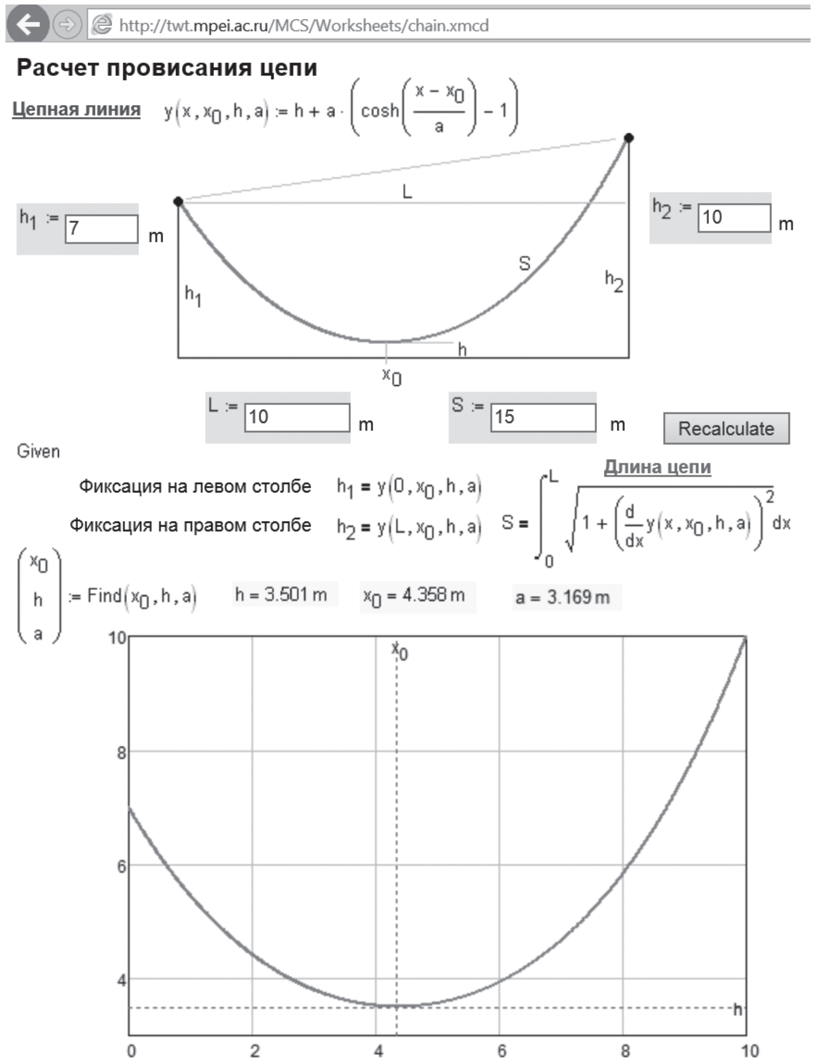


Рис. 2. Проверка модели нити с грузиками: сайт по расчету провисания цепи

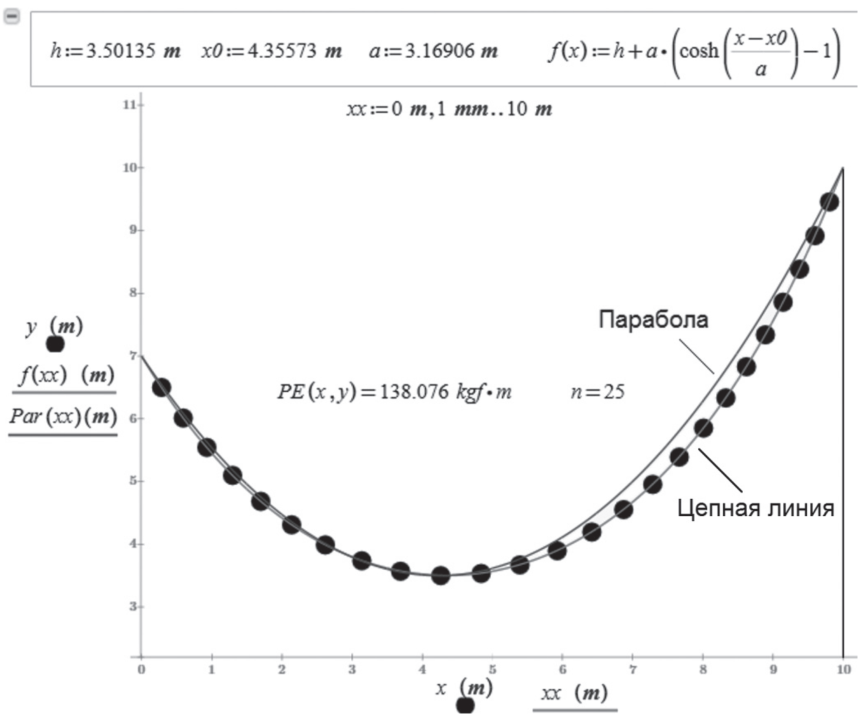


Рис. 3. Проверка модели нити с грузиками: наложение цепной линии на грузики

Ограничен

$$\Delta s^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \ldots$$

… и еще 7 звньев цепи

Решатель

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \mathbf{Maximize}(PE, x, y)$$ Максимизация потенциальной энергии

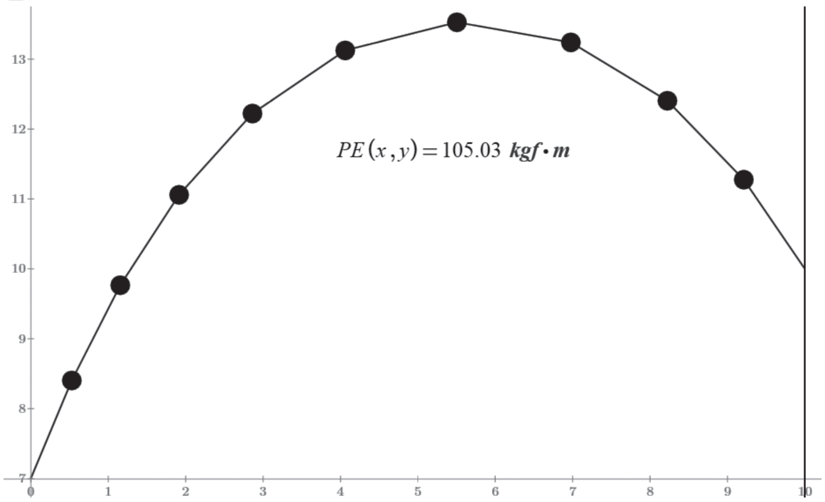


Рис. 4. Арка — перевернутая цепь

Изложенное позволяет предложить такую интересную **школьную лабораторную работу, объединяющую физику, математику и информатику.**

Берется нить, на которой крепятся грузики одного или разного веса на одинаковых или разных расстояниях друг от друга. Эти «бусы» подвешиваются за два конца нити. Все это фотографируется на камеру на фоне листа миллиметровой бумаги и отправляется на компьютер, где оцифровывается — определяются координаты всех узловых точек цепи. Далее решается описанная нами задача оптимизации с ограничениями. Тут можно также учесть и вес нити, принимая ее за ломаную прямую (рис. 1, 4) или отрезки цепной функции (рис. 3). Заканчивается эта работа наложением графика провисания «бус» на фотографию реальной механической системы с грузиками и анализом полученных результатов. Нерастяжимые нити можно заменить на резинки и решить данную задачу с учетом потенциальной энергии растяжения и/или закона Гука. Данная задача обсуждалась на сайте: https://www.ptcusercommunity.com/thread/143140. Нить с грузиками можно отклонить в сторону и отпустить, получив своеобразный маятник — см. https://www.ptcusercommunity.com/thread/143385.

Список использованных источников

1. *Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. М.: Лань, 2016. (Этюд 7 «Цепная функция или пятый элемент». См. также форум книги: https://www.ptcusercommunity.com/groups/etudes)

2. Три вопроса к блоку *Решение* Mathcad // PTC Community. https://www.ptcusercommunity.com/thread/136678

3. *Янпольский А. Р.* Гиперболические функции. Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов. М.: Физматлит, 1960. https://books.google.ru/books?isbn=545825953X

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Уважаемые коллеги!

С 1 октября 2015 года статьи для публикации в журналах «Информатика и образование» и «Информатика в школе» должны отправляться в редакцию **только через электронную форму на сайте ИНФО (раздел «Авторам → Отправка статьи»)**: http://infojournal.ru/authors/send-article/

Обращаем ваше внимание, что для отправки статьи необходимо предварительно зарегистрироваться на сайте ИНФО (или авторизоваться — для зарегистрированных пользователей).

Требования к оформлению представляемых для публикации материалов остаются прежними, с ними можно ознакомиться на сайте ИНФО в разделе **«Авторам»**: http://infojournal.ru/authors/

Дополнительную информацию можно получить в разделе **«Авторам → Часто задаваемые вопросы»**:

http://infojournal.ru/authors/faq/

а также в редакции ИНФО:

e-mail: readinfo@infojournal.ru

телефон: (495) 364-95-97