Стационарная теплопроводность в трехслойной плоской стенке

На рисунках 1 и 2 показано решение в среде SMath задачи по стационарной теплопроводности в трехслойной стенке. Задача имеет важное практическое приложение. Один из примеров: в настоящее время стены некоторых многоэтажных жилых домов возводят так: первый слой – железобетонная несущая конструкция, второй (внутренний) слой – теплоизоляция, третий слой – наружная декоративная плитка. Как распределена температура в такой стенке, если заданы некоторые начальные условия?

В задачнике условие задачи может быть прописано предельно лаконично:

1.7. Дана трехслойная плоская стенка: δ_1 = 20 мм; λ_1 = 20 Вт/(м К); t_{c1} = 10 °С; λ_2 = 5 + 0,05t Вт/(м К); t_{c4} = 60 °С; δ_3 = 60 мм; λ_3 = 10 Вт/(м К); $t_{ж2}$ = 150 °С; α_2 = 18 Вт/(м^2 К). Найти δ_2.

В задаче рассматривается стационарная теплопроводность в многослойной плоской стенке, при этом толщина стенки существенно меньше, чем ее высота и ширина, поэтому рассматриваемая задача одномерная. При этом с одной стороны стенки (на рис. 1 слева) заданы граничные условия I рода, а на другой стороне стенки (справа) заданы граничные условия III рода.

Первая строка на рис. 1 – это комментарий, который в среде SMath вводился в расчет так. Набирается через клавиатуру компьютера слово Даны, а затем нажимается клавиша пробела, что превращает переменную Даны в комментарий, который далее расширяется. Переменные и комментарии в среде SMath прописываются разным шрифтом, который пользователь при необходимости может изменить.

В текстовый комментарий через команду меню Вставка/формула вставлены операторы присвоения значений исходных величин. Конструкция в пункте 1 на рис. 1 – это фактически один оператор: комментарий, в который вставлены формулы.

Пакет SMath может работать не только с числовыми значениями, но, что очень важно, и с физическим величинами. Более того, современные негласные стандарты требуют, чтобы расчеты проводились только с использованием единиц измерения. Это упрощает ведение расчетов и позволяет избавить их от ошибок, связанных с пересчетом единиц измерения и их несоответствия, когда, образно говоря, пытаются "сложить метры с килограммами".

Даны следующие параметры трехслойной плоской стенки:

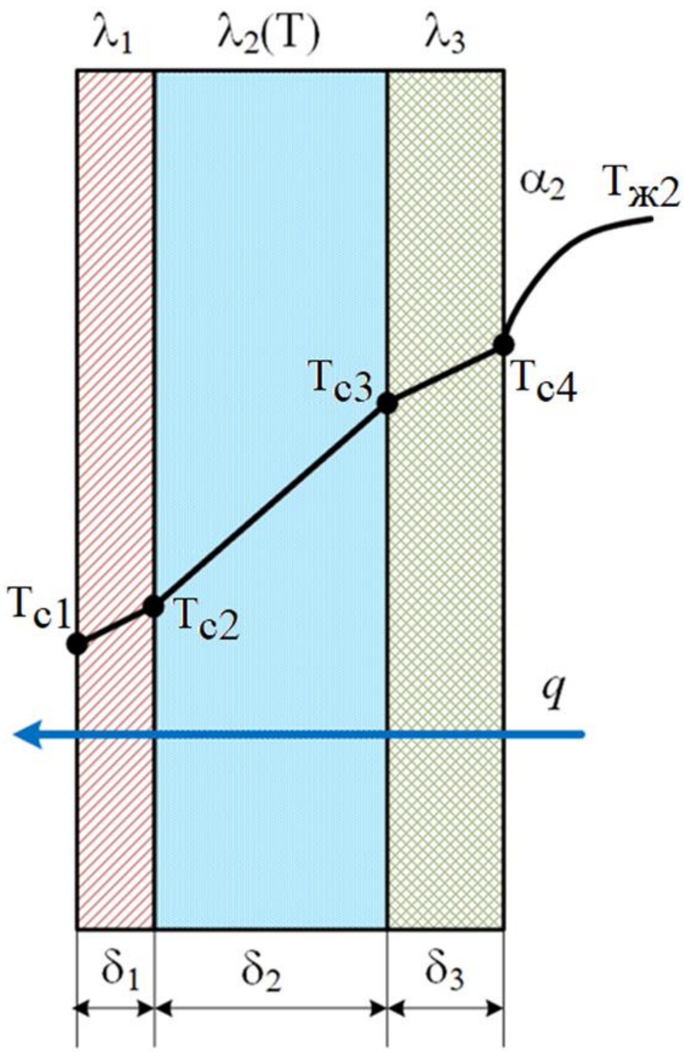
$T_{c1} := 10\ °C$; $\delta_1 := 20\ mm$; $\lambda_1 := 20\ \dfrac{W}{m^2\ \dfrac{K}{m}}$;

$$\lambda_2(T) := \left(5 + 0.05 \cdot \left(\frac{T}{K} - 273.15\right)\right) \frac{W}{m^2\ \dfrac{K}{m}}; \qquad (1)$$

$\delta_3 := 60\ mm$; $\lambda_3 := 10\ \dfrac{W}{m^2\ \dfrac{K}{m}}$;

$T_{c4} := 60\ °C$; $\alpha_2 := 18\ \dfrac{W}{m^2\ K}$ и $T_{ж2} := 150\ °C$. Найти δ_2.

Графическая иллюстрация задачи



(2)

Рис. 1. Расчет в среде SMath задачи: ввод исходных данных)

В теплотехнических ручных расчетах и в расчетах, проводимых в программных средах без инструментария единиц измерения, под хранение значения температуры резервируется две переменные t и T. Первая хранит численное значение температуры в градусах Цельсия (относительная шкала), а вторая – в кельвинах (абсолютная шкала). Поэтому многим с первого взгляда покажутся неправильными операторы присваивания $T_{c1} := 10^\circ C$, $T_{c4} := 60^\circ C$ и $T_{ж2} := 150^\circ C$, показанные в пункте 1 на рис. 1. Здесь, руководствуясь правилом двух переменных, нужно было записать так: $t_{c1} := 10$, $t_{c4} := 60$ и $t_{ж2} := 150$, а потом дополнить все это следующими операторами $T_{c1} := t_{c1} + 273,15$, $T_{c4} := t_{c4}\ t_{c1} + 273,15$ и $T_{ж2} := t_{ж2}$. Но инструментарий единиц измерения, задействованный в нашем расчете, имеет то следствие, что переменные T_{c1}, T_{c4} и $T_{ж2}$ сразу будут хранить значения температуры по абсолютной шкале в кельвинах – в базовых единицах СИ. В этом несложно убедиться, если после оператора ввода сразу ввести оператор вывода: $T_{c1} := 10^\circ C = 283.15K$.

Переменные на рис. 1 имеют *индексы*. Но это не операторы работы с элементами вектора, о которых речь пойдет ниже. Это просто часть имени переменной, смещенная для наглядности ниже уровня самой переменной. Текстовый индекс вводится в переменную через нажатие клавиши "точка": после увода курсора конструкция T.c1 превращается в конструкцию T_{c1}. Забегая вперед, скажем, что оператор работы с элементами вектора вводится в расчет через нажатие клавиши "[". Это идет от языков программирования, где элементы массивов обычно заключены в квадратные скобки.

В условиях задачи о трехсторонней стенке, продублированных на рис. 1, сказано, что коэффициент теплопроводности второй (средней) стенки не является константой и линейно зависит от температуры. Приведена типичная эмпирическая формула $5 + 0{,}05t$, возвращающая этот коэффициент в оговоренных единицах и работающая с обезразмеренными градусами Цельсия, на что указывает маленькая буква t. Чтобы эта формула состыковалась с компьютерным инструментарием единиц измерения, ее нужно трансформировать в вид, показанный на рис. 1 (см. оператор на третьей строке расчета у цифры 1).

В описании задачи мы используем термин *коэффициент теплопроводности*, а не рекомендованный ГОСТом 8.417-2002 термин *теплопроводность*. Дело в том, что теплопроводность – это процесс передачи тепловой энергии, а коэффициент теплопроводности – это численное значение интенсивности этого процесса. Термин коэффициент теплопроводности прочно прижился в практике теплотехнических расчетов.

И еще одно отступление от ГОСТа. В единице коэффициента теплопроводности на рис. 1 можно заметить лишние метры: W/(m^2 K/m), которых нет в рекомендованных упомянутым ГОСТом единице W/(m K). Это было сделано намерено для того, чтобы вернуть в эту единицу измерения её физическую суть, определяемую законом Фурье: теплопроводность (коэффициент теплопроводности) численно равна (равен) тепловому потоку (W – ватт), проходящему через единицу поверхности (m^2 – квадратный метр) при градиенте температуры 1 K/m (K – кельвин, m – метр).

После ввода исходных данных показана схема задачи (пункт 2). Этот рисунок можно создать в любом графическом редакторе (в Paint, например) и вставить в SMath-расчет.

После ввода исходных данных следуют операторы решения задачи – рис.

Одно из решений:

$$q := \alpha_2 \cdot \left(T_{ж2} - T_{c4}\right) = 1620\ \frac{kg}{s^3} \qquad (3)$$

$$T_{c2} := \text{solve}\left(q = \lambda_1 \cdot \frac{T_{c2}\ K - T_{c1}}{\delta_1},\ T_{c2},\ T_{c1},\ T_{c4}\right) K = 11.62\ °C \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} T_{c3} \\ \delta_2 \end{bmatrix} := \text{roots}\left(\begin{bmatrix} q = \dfrac{\lambda_2\left(T_{c2}\right) + \lambda_2\left(T_{c3}\ K\right)}{2} \cdot \dfrac{T_{c3}\ K - T_{c2}}{\delta_2\ m} \\ q = \lambda_3 \cdot \dfrac{T_{c4} - T_{c3}\ K}{\delta_3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{c3} \\ \delta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{c4} \\ 100\ mm \end{bmatrix}\right) \qquad (5)$$

$$T_{c3} := T_{c3}\ K = 50.28\ °C \qquad \delta_2 := \delta_2\ m = 156.3\ mm \qquad (6)$$

Рис. 2. Расчет в среде SMath задачи под номером 1.7 из [1] (собственно расчет)

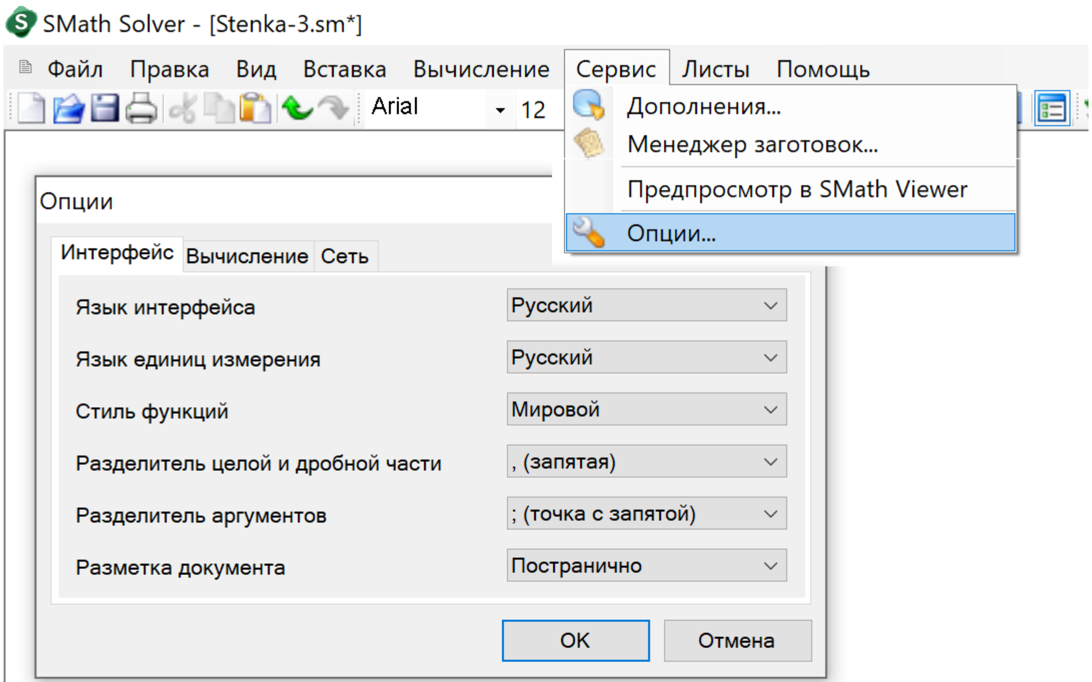
В пункте 3 на рисунке 2 рассчитывается тепловой потока q по формуле Ньютона-Рихмана, включающей в себя три заданные величины: значение коэффициента теплоотдачи у правой границы стенки α_2 и значений двух температур T_{c4} (температура на поверхности третьей стенки) и $T_{ж2}$ (температура среды, омывающей поверхность стенки). Ответ будет выдан с упрощенной единицей kg/s^3, которые был заменен на более правильный с точки зрения физики задачи W/m^2.

В пункте 4 температура между первым и вторым слоем стенки T_{c2} определяется не через счет по формуле, а через решение уравнения Фурье для однослойной плоской стенки. Встроенная в SMath функция `solve` (решить) в данном варианте вызова имеет четыре аргумента: решаемое уравнение, переменная, по которой ищется решение T_{c2}, и два значения между которыми решение ищется методом половинного деления T_{c1} и T_{c4}. Ответ выдан в кельвинах, которые были заменены на более привычные градусы Цельсия. Для этого достаточно щелкнуть два раза мышкой по черному квадратику, стоящему правее ответа, и выбрать в появившемся диалоговом окне нужные единицы температуры.

Если же нужно решить не одиночное уравнение, а систему уравнений, то вызывается встроенная в SMath функция `roots` (корни – см. п. 5), у которой в данном варианте вызова три аргумента: вектор уравнений, вектор неизвестных и вектор начальных приближений к решению.

Особенность поиска корня уравнения или системы уравнений в среде SMath состоит в том, что значения искомых величин должны быть безразмерными. Поэтому у неизвестных уравнений на рис. 3 приписаны их единицы измерения. В пункте 4 на кельвины умножается вызываемая функция `solve`. В случае же решения системы уравнений (п. 5) найденные безразмерные корни переводятся в размерный вид отдельными операторами в пункте 6.

На рисунке 3 показано альтернативное оформление расчета



Одно из решений:

$$q := \alpha_2 \cdot \left(T_{ж2} - T_{c4}\right) = 1620\ \frac{\text{кг}}{\text{с}^3} \qquad (3)$$

$$T_{c2} := \mathrm{solve}\left(q = \lambda_1 \cdot \frac{T_{c2}\ \text{К} - T_{c1}}{\delta_1};\ T_{c2};\ T_{c1};\ T_{c4}\right) \text{К} = 11,62\ {}^\circ\text{C} \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} T_{c3} \\ \delta_2 \end{bmatrix} := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} q = \dfrac{\lambda_2 \left(T_{c2}\right) + \lambda_2 \left(T_{c3}\ \text{К}\right)}{2} \cdot \dfrac{T_{c3}\ \text{К} - T_{c2}}{\delta_2\ \text{м}} \\ q = \lambda_3 \cdot \dfrac{T_{c4} - T_{c3}\ \text{К}}{\delta_3} \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} T_{c3} \\ \delta_2 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} T_{c4} \\ 100\ \text{мм} \end{bmatrix}\right) \qquad (5)$$

$$T_{c3} := T_{c3}\ \text{К} = 50,28\ {}^\circ\text{C} \qquad \delta_2 := \delta_2\ \text{м} = 156,3\ \text{мм} \qquad (6)$$

Рис. 3. Альтернативное оформление расчета, показанного на рис. 2.

На рисунке 2 уравнение и система двух уравнений (п. 5) решались численно. Но их можно решить и аналитически – получить не конкретные численные значения, а формулы для их расчета – см. рис. 4.

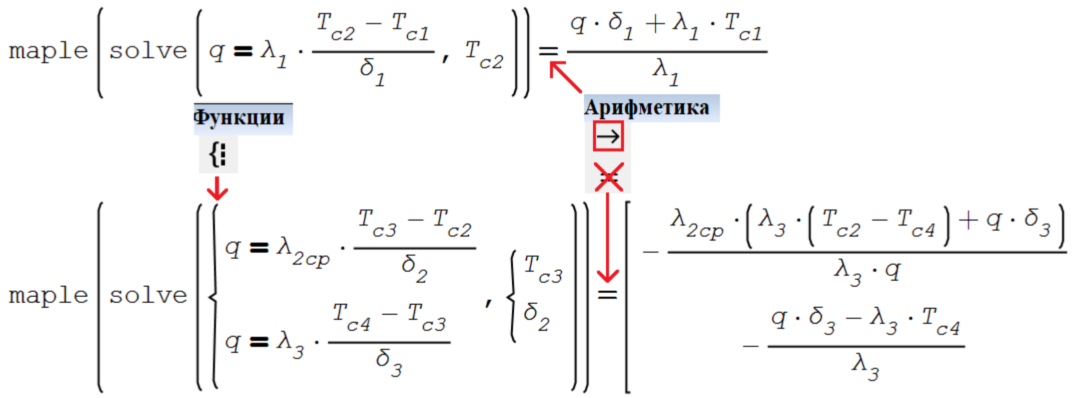


Рис. 4. Аналитическое решение уравнения и системы уравнений

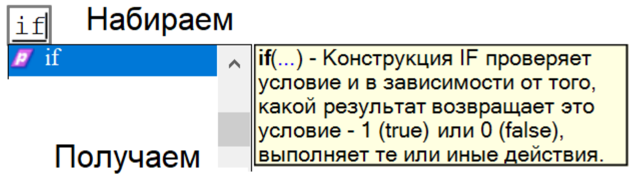
На рисунке 4 показан вызов в среде SMath функции пакета Maple – функции `solve` с двумя аргументами: с уравнением или с системой (фигурные скобки) уравнений и с неизвестным или системой неизвестных. Заканчивается ввод таких конструкций нажатием не на клавишу равно (вывод численного ответа), а на кнопку "стрелочка направо" (вывод символьного ответа) панели Арифметика. Но в самом операторе эта стрелочка будет показана символом равно.

Работа с функцией `solve`, показанная на рис. 4, возможна после подгрузки к среде SMath соответствующего дополнения (плагина) через цепочку команд Сервис/Дополнения/Галерея онлайн/Maple Tools.

Мы только что упомянули интеграл не случайно. Наша задача на рис. 3 (трехслойная стенка) решается, в том числе, и через поиск корня системы уравнений, второе из которых интегральное, т.к. содержит неизвестную величину в пределе интеграла. Зависимость коэффициента теплопроводности материала второй стенки от температуры линейная, и поэтому интеграл из уравнения можно убрать. Да и вообще эту задачу можно решить намного проще – без уравнений и систем. Но эта зависимость может быть более сложная, полученная, к примеру, кусочно-линейной или сплайновой интерполяции дискретных значений. Здесь без интеграла уже не обойтись. Да и форма стенки может быть тоже более сложной – её, например, свернули в трубочку, и вдобавок ввели в расчет внутренние источники тепловой энергии. Но с образовательной точки зрения работа с уравнением, описывающим конкретное физическое явление, намного предпочтительней работы с формулой корня уравнения.

Графические инструменты пакета SMath позволяют построить график изменения температуры внутри нашей трехслойной стенки – см. рис. 5.

$$T(\delta) := \begin{cases} T_{c1} - \dfrac{T_{c1} - T_{c2}}{\delta_1} \cdot \delta & \text{if } \delta \le \delta_1 \\ T_{c2} + \dfrac{T_{c3} - T_{c2}}{\delta_2} \cdot (\delta - \delta_1) & \text{else if } \delta \le (\delta_1 + \delta_2) \\ T_{c3} - \dfrac{T_{c3} - T_{c4}}{\delta_3} \cdot (\delta - \delta_1 - \delta_2) & \text{else} \end{cases} \qquad (7)$$

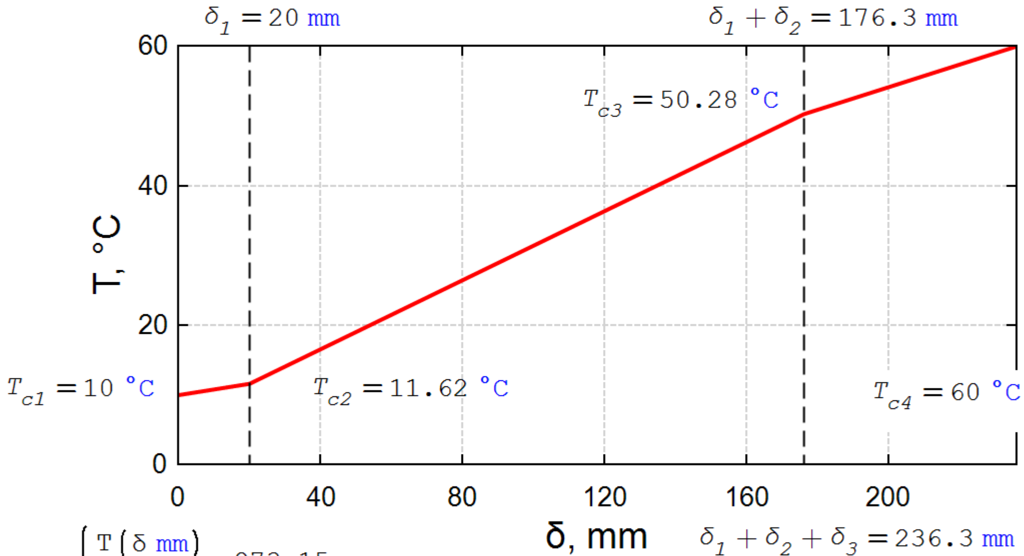


Получаем

```
if ▪
   ▪
else
   ▪
```

С помощью двух запятых плучаем

```
if ▪
   ▪
else if ▪
   ▪
else
   ▪
```



$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{T(\delta\ \mathrm{mm})}{K} - 273.15 \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\delta_1}{mm} & \dfrac{T_{c4}}{K} - 273.15 \\ \dfrac{\delta_1}{mm} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\delta_1 + \delta_2}{mm} & \dfrac{T_{c4}}{K} - 273.15 \\ \dfrac{\delta_1 + \delta_2}{mm} & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

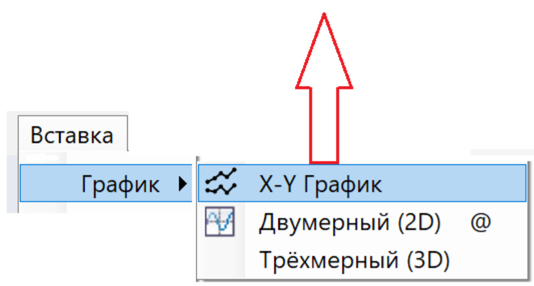


Рис. 5. Построение графика изменения температуры по толщине стенки

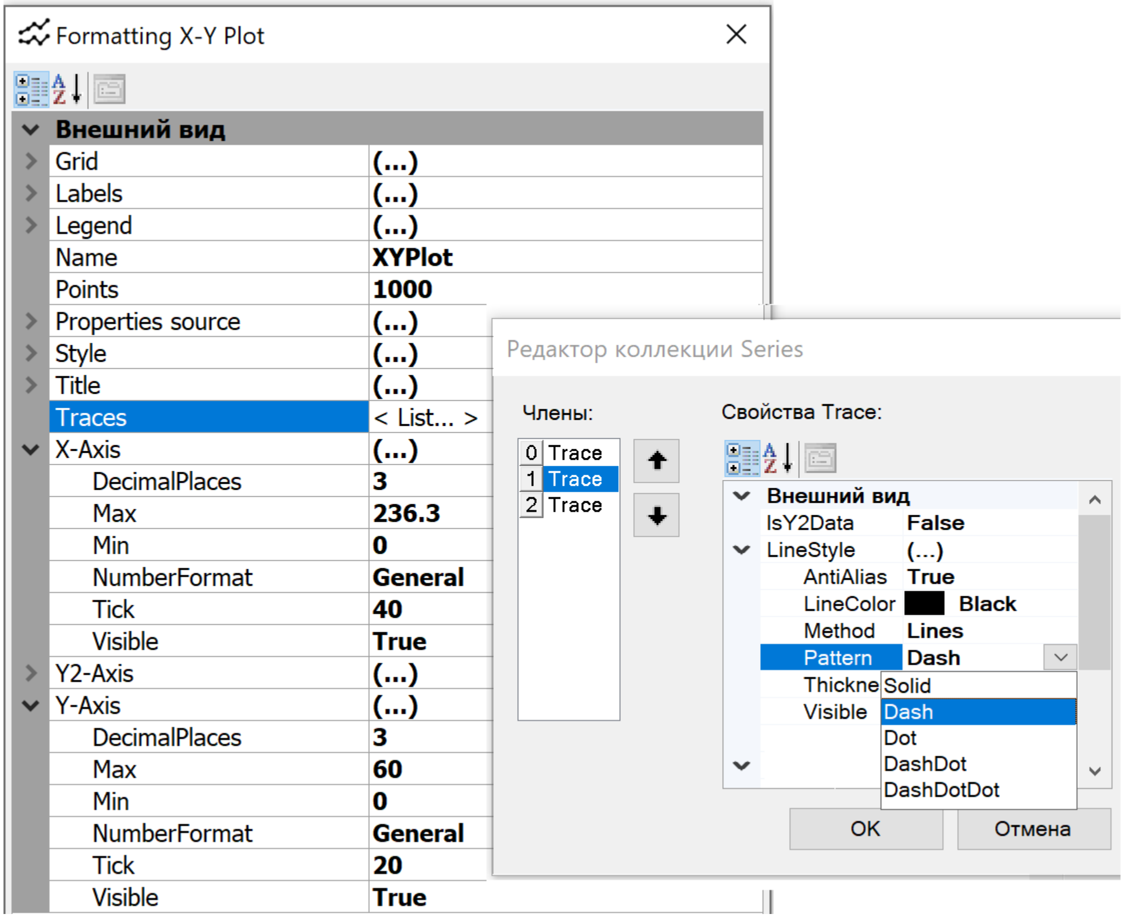


Рис. 6. Диалоговые окна форматирования графика

На рисунке 5, во-первых, показано создание функции пользователя $T(\delta)$ с опорой на встроенные операторы `if`, `else if` и `else`. Далее эта функция отображается на графике X-Y График, который нужно подгрузить как дополнение к ядру SMath. С ядром SMath поставляются только графики Двумерный (2D) и Трёхмерный (3D). График Двумерный (2D) применяется в основном для создания анимаций – см. главу 1 здесь [2], но он имеет слабые инструменты форматирования. Эти инструменты богатые у графики вида X-Y График – см. рис. 6.

На рисунке 5 можно видеть линии трех графиков: сплошной линии, состоящей из отрезков прямых, соединяющих точки на краях слоев стенки, и двух вертикальных пунктирных прямых линий, отмечающих границы слоев стенки. Около и поверх графика выведены значения температур и толщин слоев.

Двойным щелчком мыши по графику на рис. 5 вызываются диалоговые окна, показанные на рис. 6. Зафиксирован момент форматирования графика № 1 (граница первого и второго слоев). Нулевой график – это ломаная линия, отображающая распределение температур в слоях стенки, а график №2 – это граница второго и третьего слоев. Эти границы рисуются через задание двух матриц, гранящих координаты концов отрезков прямых линий. При рисовании графиков необходимо все переменные сделать безразмерными и отметить нужные единицы и температурные шкалы. Без этого на осях графика будут фиксироваться базовые единицы СИ – метры, а не миллиметры и кельвины вместо градусов по шкале Цельсия, к которым обращались при задании условий задачи.

Задания студентам:

1. Решить с помощью пакета SMath задачи 1.1-1.47 из задачника [1]. Пример решения задачи 1.7 показан на рис. 1.
2. На рисунке 6 температурное поле в трехслойной плоской стенке отображено в виде трех отрезков прямых. Для наружных стенок, коэффициент теплопроводности материала которых не зависит от температуры, это сделано правильно. Но для серединной стенки это предположение неверно, так как там коэффициент теплопроводности материала зависит от температуры. Если эта зависимость линейна (как в нашем случае), то температура в данном слое стенки будет меняться по параболическому закону. Постройте эту дугу параболы! Подсказку можно увидеть здесь [3] – на форуме пользователей пакета SMath.
3. Решите задачу, заменив плоскую стенку на цилиндрическую или сферическую, оставив ее трехслойной.
4. Учесть в стенке внутренние источники тепла.

Литература и ссылки:

1. Цветков Ф.Ф. Задачник по тепломассообмену: учебное пособие / Ф.Ф. Цветков, Р.В. Керимов, В.И. Величко. — 2-е изд., исправ. и доп. — М.: Издательский дом МЭИ, 2008. — 196 с., ил. (https://studfile.net/preview/6812655)
2. Информационные технологии в инженерных расчетах: SMath и Python: учебное пособие для вузов / В. Ф. Очков, К. А. Орлов, Ю. В. Чудова [и др.]. — Санкт-Петербург, Лань, 2023. — 212 с. : ил. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/EC-SMath.pdf)
3. https://en.smath.com/forum/yaf_postsm81997_Temperature-field.aspx