

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ, или Триалог о королях и капусте¹, решении задач, STEM, STEAM И STREAM в образовании²

Доктор технических наук, профессор **В.Ф. ОЧКОВ**,
кандидат технических наук, старший научный сотрудник **А.И. ТИХОНОВ**
(Москва, НИУ “МЭИ”)

*Информация – это не знание,
Знание – это не мудрость,
Мудрость – это не истина,
Истина – это не красота,*

*Красота – это не любовь,
Любовь – это не музыка,
А Музыка – превыше всего*
Фрэнк Заппа

В первой части статьи мы дискутировали о том, как преподавать и изучать естественнонаучные и инженерные дисциплины в ВУЗе, о применении технологий STEM в преподавании, о необходимости решения задач, о чёрных ящиках и изобретении велосипедов, о простых, сложных, решаемых и нерешаемых задачах...

Часть II

Реальный и воображаемый мир, расчёты, модели и предсказания

И: Всё начинается с вызова. В русском языке есть хорошая поговорка: “Гром не грянет, мужик не перекрестится”. Из неё следует, что пока в реальном мире не возникнет настоятельная потребность, ничего делаться не будет.

М: У нас имеется исходная ситуация, в которой мы не можем оста-

ваться, и целевая ситуация, в которую нам нужно перейти. Переход из исходной ситуации в целевую – как раз и есть решение задачи. Таким образом, нам необходимо придумать способ перехода в целевую ситуацию.

И: Обычно для наших учебных задач целевая ситуация уже имеется и сформулирована в условиях задачи, но в реальной жизни целеполагание никто не отменял. Нам важно

¹ Авторы отсылают читателя к роману О’Генри “Короли и капуста”.

² Не всегда высказанные в статье мнения совпадают с мнением самих авторов и администрации организации, где они работают.



также продумать путь перехода из исходной ситуации в целевую, обеспечить этот переход ресурсами и инструментами.

С: Всё это хорошо, когда улице переходишь: посмотрел налево, если движение правостороннее, и направо, если левостороннее, а дальше и думать не надо, все это делалось тысячу раз...

И: Просто мы пришли к решению известной задачи. Мы знаем, как её решать, у нас есть инструменты для решения – собственные ноги и голова, которая их направляет, осталось реализовать решение задачи и дойти до противоположной стороны улицы. Если же мы не знаем, как решать задачу, то давайте разбираться, составлять план или несколько конкурирующих планов того, как достигнуть целевой ситуации.

М: Такие планы называются моделями. Мы переходим из реального мира в мир нашего воображения и пытаемся понять исходную и целевую ситуации, найти способ перехода из первой во вторую. Кстати, люди всегда так делали. Мифология – это попытка сделать мир понятным, объяснить его, связать между собой сущности реального мира, найти свой путь...

И: Как и мифологий – попыток построить модели мира – много, так и моделей, с помощью которых мы хотим описать свои задачи, найти

пути их решения, тоже много. Вернёмся к задаче поездки в аэропорт. Самая простая модель поведения: смотрим в окно и, если видим, что на улице метель, то добираемся до вокзала на метро не позже, чем за четыре часа до отлёта (лучше посидим и подождём!), и едем в аэропорт по железной дороге. В более сложной модели мы анализируем на смартфоне карту дорожной обстановки, выясняем стоимость поездки, расписание автобусов и аэроэкспрессов, выбираем вид транспорта, оцениваем время поездки, её стоимость, после чего принимаем решение. С простыми моделями легче работать, а сложные позволяют учитывать дополнительные сущности реального мира.

М: В любом случае после работы с моделями в воображаемом мире нам придётся переходить в реальный мир и принимать решение о виде транспорта, о времени выхода из дома, о заказе такси и т.д. И в любом случае ответственность за то, чтобы мы приехали вовремя, лежит на нас с вами: всё зависит от того, насколько выбранная нами модель соответствует реальной ситуации, насколько мы осторожны в оценке неблагоприятных факторов.

С: Здесь-то как раз всё понятно, последовательность действий ясна, зависит от нашего бюджета, погоды, пробок на дорогах и нашей предусмотрительности. Это совсем не относится к тем задачам, которые вы задаёте нам на дом.

Основные этапы решения задач

М: Не всё ещё ясно, поэтому перечислим основные этапы решения задач и подводные камни, которые

ожидают нас на этом пути, А затем обсудим каждый из этапов.

Все начинается с внимательного чтения условий задачи, уяснения, чего от нас хотят. После этого нам нужно перейти к поиску путей решения поставленной задачи.

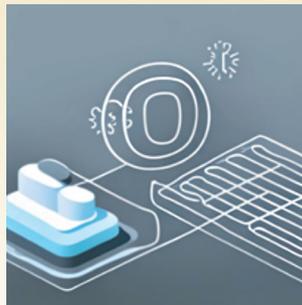
И: В этот момент мы знаем, как дойти до конца – решить задачу. Этот путь нам нужно *реализовать* – найти инструменты, данные и средства, которые нам помогут сделать это за приемлемое время, не затрачивая чрезмерных усилий и средств.

М: Мы должны обязательно проверять, не сделали ли мы ошибок – как при поиске пути решения задачи, так и при его реализации. Мы не хотим получить температуру ниже абсолютного нуля или скорость, превышающую скорость света.

И: Это могут быть своеобразные тесты, позволяющие нам проверить корректность решения задачи. В качестве таких тестов выступают решения задачи для особых случаев, которые могут быть получены аналитически, а также данные других исследователей, соображения здравого смысла.

А вот дальше мы должны будем спланировать, как нам получить результат. Если условия задачи требуют единственного расчёта, то этого делать не надо. Если же для решения задачи необходимо просчитать большое число вариантов, то нужно выполнить вычислительный эксперимент, спланировав его проведение.

М: Раз уж мы заговорили о вычислительном эксперименте, то его результаты точно так же, как и результаты реального эксперимента, необходимо обработать и представить в удобопонятной форме. Очень часто бывает, что результаты решения



задачи понимает только тот, кто эту задачу решал, так как он хорошо разобрался с нею и полученными результатами. Но если результатами решения не могут воспользоваться другие люди, то ценность сделанного стремится к нулю.

И: Представление результатов решения и их интерпретация – очень важный этап решения задачи. Если раньше единственными способами были составление отчёта, выступление на конференции, публикация статьи, то сейчас появились инструменты, позволяющие представить решение в форме видео или даже интерактивного веб-приложения, с которым можно “поиграться”, просто запустив браузер.

М: Наконец, наступает этап получения пирогов и пышек, а также синяков и шишек. Под этим понимается получение заслуженных, а иногда незаслуженных наград за успешное решение задач или наказаний за отсутствие или неправильное решение.

Читаем условия задачи

М: Основная ошибка при решении задач – невнимательное прочтение её условий. Именно от этого идёт непонимание. Прежде чем решать задачу, нужно выяснить, что от нас хотят, и не стесняться спросить, если что-то непонятно.



И: Учебные задачи отличаются от практических по крайней мере тем, что у первых всегда есть решение.

М: Для учебных задач всегда, пусть и неявно, известно, какие средства применять для их решения. Более того, эти средства изучались ранее.

И: Во всяком случае должны были изучаться. Если же для решения задачи требуются дополнительные знания, то об этом говорится либо в условиях задачи, либо в пояснениях к ней, но бывает это редко. Я такой подход использую только в типовых расчётах и мини-проектах, для решения которых отводится не один час. Многие вещи можно обсудить на консультациях, было бы желание. Кроме того, учебные задачи обычно типовые, и для их решения часто достаточно аналогии – разбора решений задач, похожих на них.

В практических задачах все по-другому. Не очень важно, каким путём осуществлено решение задачи, важен результат.

М: Для практических задач характерно, что в условиях не всегда точно заданы условия, бывает, что постановщик задачи не знает точных значений ни входных, ни выходных параметров.

И: Условия практической задачи – компромисс между желаемым и возможным. Получить желаемое

не всегда возможно, а возможное неинтересно для того, кто ставит задачу. Этот компромисс достигается в результате ожесточённых споров и последовательности договорённостей.

М: Многие практические задачи – обратные, как уже говорилось раньше, мы знаем, чего хотим, но не знаем, что для этого нужно и как это сделать. Обратные задачи сводятся к решению последовательности прямых задач. Чем больше мы знаем о взаимосвязях параметров задачи, тем проще найти желаемый результат. В противном случае нужно перебрать все возможные значения входных параметров, а это не всегда возможно. Как говорил Мефистофель: “Искусство вечно, жизнь коротка”.

И: Иногда задачи проектирования сводятся к задачам оптимизации, но это скорее пример того, как хвост виляет собакой. Задача подгоняется под хорошо работающие инструменты – методы оптимизации. Для задач проектирования характерна другая постановка: параметрам задаются области *допустимых* значений, а успешное решение означает, что значения всех параметров находятся в этой области. При использовании методов оптимизации требуется переформулировать задачи проектирования.

М: Ну вы уселись на своего любимого конька. Кроме того, не упомянули, что для решения задачи проектирования необходимо не только войти в область допустимых значений, но и находиться как можно дальше от её границ. Иначе случайные изменения параметров приведут к выходу за границы области допустимых значений и обусловят, как следствие, уменьшение процента

выхода годных в процессе производства. Мы это с вами неоднократно обсуждали, но, наверное, это не относится непосредственно к теме нашего диалога и не очень интересно для С.

С: Действительно, давайте перейдём к процессу решения задач. Даже когда условия задачи понятны, часто не знаешь, что же делать дальше, как её решать.

И: Серебряной пули или волшебной палочки для решения задач нет, но есть приёмы, применение которых ведёт к успеху.

Аналогия, поиск, декомпозиция, хорошо решаемые задачи, “склеивание”, доверяй, но проверяй



М: Первый и самый очевидный способ – вспомнить, не решали ли мы подобные задачи раньше. Как гласит известная поговорка, в критической ситуации, а это касается экзаменов, ты не поднимаешься до уровня своих ожиданий, а опускаешься до уровня своей подготовки. Чем больше задач решено в семестре, тем проще на экзамене.

С: Вы уже говорили об этом, но кроме учёбы есть работа и личная жизнь, и получается то, что получается.

М: В любом случае сначала нужно проанализировать решения похожих задач. Очень редко бывает, что достаточно только подставить другие числовые значения входных параметров в решение похожей задачи, хотя именно этого и хотелось бы. В остальных случаях всё зависит от того, хватит ли знаний и навыков для преобразования решения найденной задачи в решение исходной.

И: Далеко не всегда найденное в Сети – истина в последней инстанции и оно может содержать ошибки. Это тоже необходимо иметь в виду.

М: Я скажу страшную вещь, но чтение учебников, поиск и сравнение информации, найденной в Интернет, анализ решений похожих задач, хотя и отнимает драгоценное время, но помогает решить поставленную задачу.

И: Если известен способ решения задачи, то дальше нужно найти адекватный инструмент для её решения. Это может быть тетрадь и ручка, а может – одна или несколько математических программ, используемых в учебном процессе. Например, если нам необходимо решить задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений, то выбор ясен: нужна математическая программа. Если же требуется решить краевую задачу, то мы ищем, есть ли готовые средства для этого. И если их нет, то пытаемся реализовать решение краевой задачи, сводя её к решению последовательности задач, инструмент для решения которой у нас имеется, а именно к решению задачи Коши – задачи с начальными условиями. В данном случае нам придётся реализовать метод пристрелки, например. Во всяком случае, мы установили связь между задачей

и имеющимися инструментами для её решения.

М: Аналогия и поиск – приёмы полезные, но они не всегда срабатывают при решении даже учебных задач. Любая сколько-нибудь интересная и сложная задача предполагает декомпозицию исходной задачи на несколько подзадач. В любом случае мы должны представить нашу задачу в виде последовательности подзадач. Сама по себе декомпозиция сильно зависит от того набора инструментов, которым мы пользуемся. Инструментами могут быть, как уже говорилось, тетрадь и ручка, учебники и справочники, математические системы, специализированные программные пакеты для решения определённых классов задач, например, для прочностных расчётов или расчёта электрических полей.

С: Я правильно понял, что исходную задачу нужно преобразовать в последовательность известных решаемых задач, для которых у нас имеются инструменты?

И: Для учебных задач это почти всегда так, а для практических задач декомпозиция напоминает мозаику, нужно сначала выявить элементы мозаики. Я их называю ХРЗ – *хорошо решаемые задачи*. Может оказаться, что не все элементы мозаики у нас есть. В этом случае нам придётся изготовить их самим, то есть в нашей терминологии – изобрести велосипед.

М: Не всегда декомпозиция осуществляется за один шаг. Подзадача может оказаться настолько сложной, что для неё нет ХРЗ, и к ней приходится применить ранее использованный подход – декомпозицию.

Метафора мозаики мне нравится! Единое целое исходной задачи мы последовательно расчлени-

ем на элементы так, чтобы каждый элемент – подзадачу – можно было решать отдельно. В этом отношении процесс декомпозиции напоминает разборку семейства русских матрёшек.

И: Отмечу, что именно этот шаг – декомпозиция задачи на подзадачи, которые можно решить, – определяет успех решения всей задачи. Он требует знаний, умений и опыта, приобретаемого в процессе решения более простых задач. Это заставляет вспомнить цитату из фильма Б. Фосса “Кабаре”: “Кто не умеет работать головой, тот компенсирует это ногами”.

М: Декомпозиция позволяет нам, во-первых, сосредоточиться на решении отдельных подзадач, а во-вторых, ускорить решение исходной задачи, распределив подзадачи между участниками проекта.

С: Я правильно понял, что декомпозиция преобразует исходную задачу в набор ХРЗ?

М: Не совсем. Декомпозиция экономит нам время. Если мы не находим ХРЗ, то данную подзадачу нам придётся реализовывать своими руками или искать специально обученных людей для этого.

И: Декомпозиция исходной задачи на подзадачи осуществляется не единственным образом и зависит от знаний и навыков тех, кто решает задачу, и от доступных ресурсов и инструментов, имеющихся в наличии. Не забываем и о том, что если задача практическая, то в случае отсутствия решения её можно попытаться переформулировать.

М: Приведем пример. Пусть мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение. Его решение выражается через функции Бесселя. У нас есть несколько возможностей:

выполнить все выкладки вручную, использовать средства символьных вычислений, а если нет особой нужды в аналитических формулах, то выполнить все вычисления с помощью численных методов, воспользовавшись одной из процедур, присутствующих во всех современных математических системах.

С: Таким образом, нужны ХРЗ максимально высокого уровня?

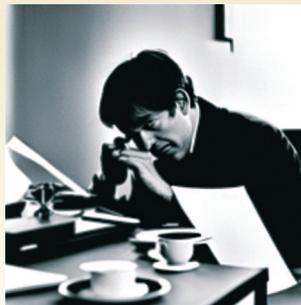
И: В том случае, когда это приводит к решению задачи. Мне часто не хватает возможностей решателя библиотеки экосистемы Python SymPy для решения нелинейных уравнений. Будем надеяться, что разработчики добавят новые возможности в этот пакет, возможно с привлечением средств искусственного интеллекта.

Инструменты развиваются, вычислительные мощности растут, развиваются и упрощаются средства научной визуализации. Вместе с ними меняются и решаемые задачи. Ещё пять лет назад я не мог и подумать решать те задачи, которые мы решаем со студентами в наглядной форме и по несколько за занятие.

С: Таким образом, все хорошо и состояние имеющегося набора инструментов для решения задач вас полностью устраивает?

М: Не всегда. Мне не хватает средств интеграции. Одни и те же возможности в разных системах реализованы по-разному, где-то хуже, где-то лучше. Хотелось бы простых средств, передающих результаты решения задачи из одной системы в другую.

И: Мне не хватает средств решения уравнений математической физики, включённых в основной функционал математических систем так, чтобы не нужно было их



приобретать за дополнительные деньги или обращаться к специализированным системам.

Для бесплатных систем очень хотелось бы повышения качества документации. Особенно это касается экосистемы Python. Часто многие вещи приходится объяснять студентам самому. Но, как говорит русская пословица: "Дарёному коню в зубы не смотрят!". Нужно быть благодарными за то, что есть.

С: Где и как искать эти ваши ХРЗ?

М: В учебниках, в статьях, в Сети. Задавать вопросы, говорить со знающими людьми. Сейчас это называется гибкие навыки. Именно для этого и ездят на конференции. Обсуждения в кафе со знающим человеком могут дать для решения задачи больше, чем бессонные ночи. Кстати, в этом случае нужно уметь правильно задать вопрос.

С: Вернёмся к нашей мозаике. Мы превратили исходную задачу в набор элементов мозаики, части элементов у нас нет. Что же делать дальше?

М: Хороший вопрос! Прежде всего, реализуем отсутствующие элементы мозаики. После этого нам нужно будет решить каждую подзадачу. Для нас ХРЗ – это черный ящик, которому мы передаём входные данные, а он возвращает нам результат. Может оказаться, что

найденная нами ХРЗ не сможет справиться с имеющимся данным. Это возвращает нас к поиску средств решения данной подзадачи.

Важно то, что подзадачи нашей задачи связаны между собой данными. Выходные данные одной подзадачи служат входными для одной или нескольких других подзадач.

И: Получается так, что потоки данных передаются от подзадачи к подзадаче. В простейшем случае это один поток, иногда река данных разделяется на рукава, затем эти рукава сливаются...

М: Всё как обычно: данные передаются от одного черного ящика – подзадачи – к другому. Замечательно, когда это делается без нашего участия и подзадачи согласованы между собой, но так бывает редко. Обычно разные люди реализуют различные ХРЗ, у них разное представление о том, какие данные и как должны передаваться на вход, что и как ХРЗ должна возвращать. Вот тут для нас начинается настоящая работа: нам надо сделать так, чтобы данные, возвращаемые одной подзадачей, стали пригодными для другой, и делать это без ошибок.

И: Нам следует преобразовать данные, руководствуясь документацией, которая имеется по каждой ХРЗ. Этот процесс называется “склеиванием”. Он трудоёмкий, скучный, провоцирует ошибки, но без этого никуда не денешься.

М: Будем надеяться, что в следующих версиях математических систем данный этап решения задач будет упрощён примерно так, как это сделано в Mathematica.

И: Вероятно, это будет доступно только в платных системах, а в экосистеме Python такого, скорее всего, никогда не будет, так как она разви-

вается хаотично никем не управляемым сообществом.

С: Ура! Наконец-то мы дошли до конца, до результата!

М: А вот и нет! Мы забыли об очень существенном факторе – об ошибках. Человек слаб, ему свойственно ошибаться. Ошибки могут возникнуть на всех этапах, начиная от постановки задачи и кончая интерпретацией результатов.

Поэтому в процессе решения задач мы должны предусмотреть процедуры и средства поиска и исправления ошибок.

И: При этом у нас может получаться результат, его можно даже нарисовать, но это будет совсем не то, чего мы ждём и что есть на самом деле.

М: Мы не можем застраховаться от всех возможных ошибок, наши усилия направлены на то, чтобы сократить их число, облегчить их поиск и исправление.

И: Основными средствами у нас будут внимательность, усидчивость, здравый смысл и вся доступная информация о задаче. Не надо экономить время на чтение и понимание документации, нельзя лениться при вызове функции или процедуры для решения ХРЗ, необходимо ещё раз выяснить и проверить, что нужно ей передать, что она возвращает, какие типы данных используются, что требуется от этих данных. По-хорошему, такие проверки должны выполняться в самой функции и быть предусмотрены разработчиками. Но всё предусмотреть нельзя, а пользователь всегда сумеет сделать такое, что разработчик и вообразить не может! Казалось бы, вещи очевидные, но мне приходится повторять их по многу раз с минимальным успехом.

Для поиска и устранения ошибок нам нужны данные. Проверить, как работает ХРЗ, можно только в том случае, когда мы знаем, какие результаты должны соответствовать тестовым наборам входных данных. Может оказаться и так, что ХРЗ отказывается принимать наши данные, либо выдавая предупреждение, либо возбудив исключительную ситуацию. Первое означает, что мы чего-то не понимаем или вышли за границы применимости ХРЗ. Во втором случае это вопрос к разработчикам, и не надо стесняться задавать его либо им, либо на форумах, где общаются пользователи инструментов, с которыми вы работаете. Часто оказывается, что ответ на вопрос уже есть, его нужно только найти с помощью поисковой системы.

С: Где нужно это искать?

М: Практически для каждой тематической системы имеется сообщество пользователей. Разработчики обычно поощряют эти сообщества, так они помогают поддерживать систему, устранять ошибки, формировать направления её развития. Активными являются сообщества пользователей Mathcad и MATLAB. Ситуация с бесплатными системами несколько хуже. Сил и возможностей у их разработчиков существенно меньше.

Кстати, если у вас не хватает знаний, навыков или просто времени на решение задачи, то можно “завесить” её на форуме и дожидаться решения. Вот пример такой работы: https://en.smath.com/forum/yaf_posts_m82878_Cubic-lines.aspx.

И: Я обычно начинаю с формулировки вопроса в yandex.ru или google.com. В 90 из 100 случаев это помогает. Если не получилось,

задаю вопрос в stackoverflow.com. На русском языке есть очень полезный ресурс вопросов и ответов qna.habr.com. Если и это не помогло, то начинаю звонить и писать друзьям и знакомым, обычно это приходится делать по вопросам, связанным с постановкой задач.

М: И забыл сказать, что процесс проверки многослойный. Нужно подготовить данные и предусмотреть тестирование для каждой подзадачи и для всей задачи в целом.

И: А вот здесь **М** запомнил о том, что проверки должны быть и в процессе “склеивания”, когда подзадачи объединяются между собой. Я стараюсь “склеивать” задачи по одной и каждый раз тестировать результат.

М: Можно действовать и по-другому – склеивать задачи в блоки, тестировать эти блоки подзадач, а потом объединять блоки между собой.

И: Тактика склеивания зависит от вида задачи, имеющихся у нас данных, количества подзадач.

С: Таким образом, процесс решения задачи существенным образом зависит от инструментов, применяемых при её решении. Как мне выбрать эти инструменты?

И: Ответ на этот вопрос парадоксальный. У вас, **С**, в университете практически нет выбора. Используемые инструменты определяются корпоративной политикой университета. Если же обучение оплачивает работодатель, то он может потребовать использования определённого стека (набора) инструментов.

М: Видимо, настало время поговорить о том, какие инструменты и как их применять при решении задач.

(Окончание следует)