Статистическая задача об эллипсе и гиперболе
или
Новогодняя математическая открытка

Валерий Очков

В статье сделана попытка определения новой математической константы – вероятности получения гиперболы или эллипса. Рассмотрены средства решения математических и прочих задач посредством обращения на специализированные форумы интернета. Обсуждаются вопросы современных методов преподавания математики в инженерном вузе.

Ключевые слова: плоская кривая второго порядка, гипербола, эллипс, Mathcad, псевдослучайное число, Интернет, STEM.

Статья начинается несколько необычно.

Под Новый год некоторые традиционно ходят в баню[1]. Автор же имеет другую тоже давнюю, но более интеллектуальную предновогоднюю привычку. Он размещает на сайте пользователей математического пакета Mathcad (https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/ct-p/PTCMathcad) поздравительные анимационные открытки с неким математическим смыслом. Вот темы некоторых таких открыток:

- парашютист спускается с неба (решается дифференциальное уравнение) и на определенной высоте раскрывает полотнище с новогодним поздравлением
- стопоходящая машина (решение систем алгебраических уравнений) выполнена в виде лыжника, бегущего по новогоднему снегу
- новогодняя елка вырисовывается из колебаний многозвенного маятника (снова решение дифуров…) и т.д.

В конце 2017 года была опубликована такая новогодняя открытка: в квадрат случайным образом [1] много раз бросаются пять точек, через которые проводится плоская кривая второго порядка. Тот, кто в этой анимации увидит все семь возможных кривых (семь – красивое число!),

[1] См. культовый советский фильм «Ирония судьбы, или с лёгким паром!» (http://cinema.mosfilm.ru/films/film/Ironiya-sudby-ili-s-legkim-parom/ironiya-sudbi-ili-s-legkim-parom/)

того ждет в Новом году счастье и удача: см. https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/New-2018-Year/m-p/495771.

Известно, что через пять точек на плоскости можно провести такие кривые второго порядка [2]:

1. Две ветви гиперболы.
2. Эллипс.
3. Параболу (переходный случай от гиперболы к эллипсу).
4. Окружность (частный случай эллипса).
5. Две пересекающиеся прямые (вырожденные две ветви гиперболы).
6. Две параллельные прямые (еще один случай вырожденности двух ветвей гиперболы).
7. Одну прямую (вырожденная парабола или частный случай случаев 5 и 6).

Но на практике через пять случайно брошенных в квадрат точек можно провести, конечно, только две кривые: гиперболу с двумя ветвями и эллипс – см. рис. 1. Остальные пять кривых автор на новогодней открытке генерировал вручную, задавая определенные, а не случайные координаты пяти точек.

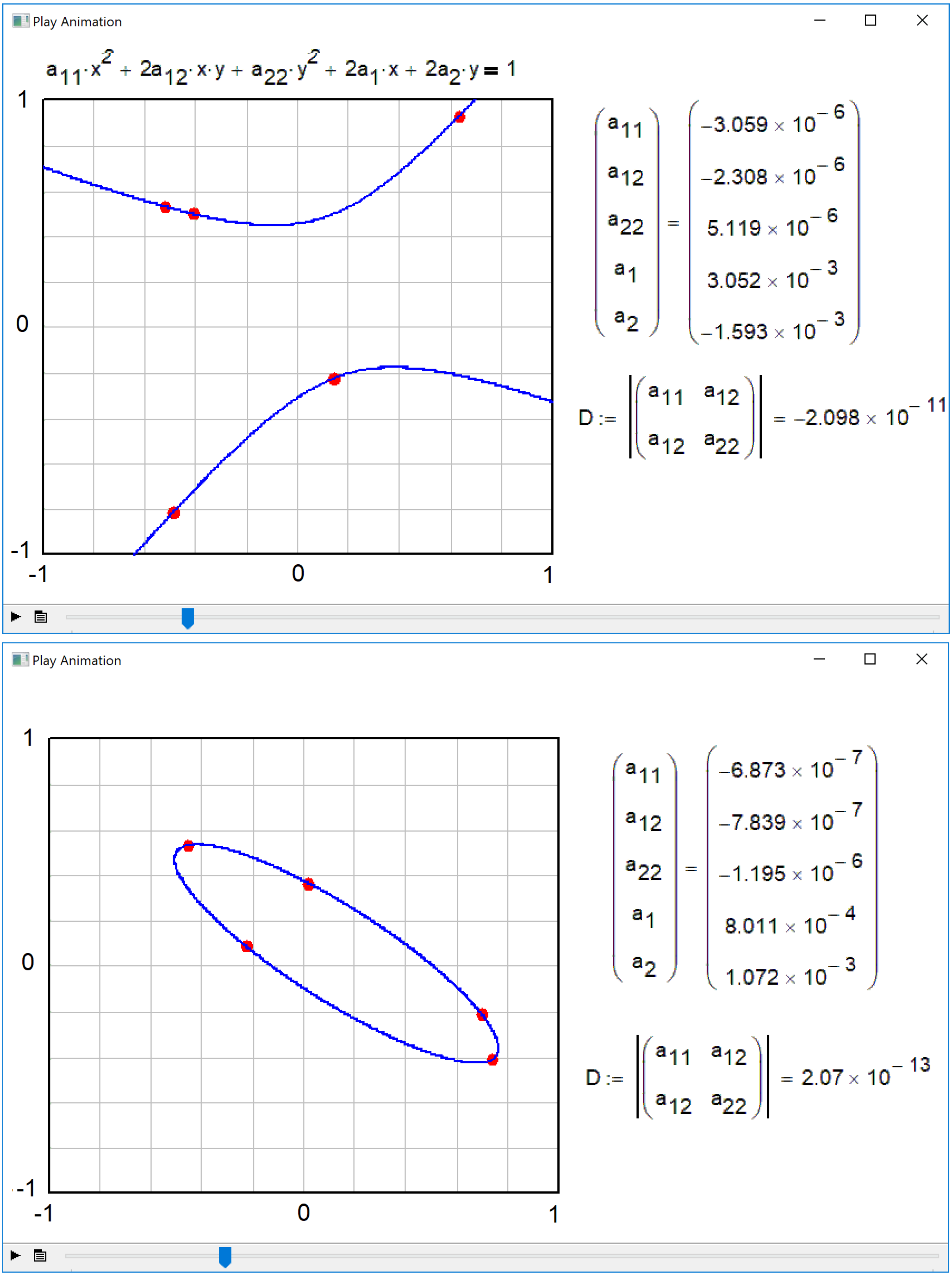

Рис. 1. Гипербола (вверху: D < 0) и эллипс (D > 0), проходящие через пять случайных точек, брошенных в квадрат

На анимационной открытке (рис. 1) показывались также рассчитанные значения коэффициентов уравнения очередной кривой второго порядка (a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1 и a_2: см ее формулу вверху рис. 1), а также значения инварианты D, по которой детерминировалась кривая: $D < 0$ – гипербола и $D > 0$ – эллипс [2].

При $D = 0$ (и при некоторых других дополнительных условиях) должна получиться парабола – переходный случай от эллипса к гиперболе. Но этот случай, повторяем, имел место только при искусственном, а не случайном задании значений векторов X и Y.

Получившим такую новогоднюю открытку дополнительно (для «полного счастья» в наступающем году) предлагалось подсчитать, сколько раз они видели гиперболу, а сколько раз эллипс.

Оказалось, что эллипс появлялся в примерно в 28% случаев, а гипербола в остальных 72%. Это было подсчитано, конечно, не через просмотр кадров анимации, а через статистический компьютерный эксперимент – см. на рис. 2 соответствующую Mathcad-программу [3].

$$
\begin{aligned}
(H\ \ E\ \ P) :=\ & \text{for } i \in 1..1000000 \\
& \quad X \leftarrow \text{runif}(5,-1,1) \\
& \quad Y \leftarrow \text{runif}(5,-1,1) \\
& \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{lsolve}\left[\begin{bmatrix} (X_1)^2 & 2\cdot X_1\cdot Y_1 & (Y_1)^2 & 2\cdot X_1 & 2\cdot Y_1 \\ (X_2)^2 & 2\cdot X_2\cdot Y_2 & (Y_2)^2 & 2\cdot X_2 & 2\cdot Y_2 \\ (X_3)^2 & 2\cdot X_3\cdot Y_3 & (Y_3)^2 & 2\cdot X_3 & 2\cdot Y_3 \\ (X_4)^2 & 2\cdot X_4\cdot Y_4 & (Y_4)^2 & 2\cdot X_4 & 2\cdot Y_4 \\ (X_5)^2 & 2\cdot X_5\cdot Y_5 & (Y_5)^2 & 2\cdot X_5 & 2\cdot Y_5 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
& \quad D \leftarrow \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right| \\
& \quad \text{if}(D < 0, H \leftarrow H+1, \text{if}(D > 0, E \leftarrow E+1, P \leftarrow P+1)) \\
& (H\ \ E\ \ P)
\end{aligned}
$$

$$H = 719484 \qquad E = 280516 \qquad P = 0 \qquad H + E + P = 1000000 \qquad \frac{E}{H} = 0.389885$$

Рис. 2. Подсчет гипербол и эллипсов, получающихся в квадратной области с пятью случайными точками

На рисунке 2 показана Mathcad-программа подсчета количества выпавших гипербол (переменная H) и эллипсов (E) при бросании десять миллионов раз пяти случайных точек в квадрат размером 2 на 2 (см. рис. 1). Заодно (на всякий случай!) подсчитывалось количество выпавших парабол (P). Но они, как и ожидалось, не выпадали.

В Mathcad-документе на рис. 2 достаточно пояснить суть следующих операторов и функций:

1. Оператор for формирует цикл с параметром i бросания точек в квадрат; переменные с именами H, E и P обнуляются автоматически;
2. Функция runif возвращает вектор с пятью элементами (первый аргумент этой функции), хранящими числа со случайным распределением на интервале от – 1 до 1 (второй и третий аргументы функции runif).
3. Функция lsolve возвращает решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица коэффициентов при неизвестных которой – это первый аргумент функции lsolve, а вектор свободных членов (единичный вектор) – второй аргумент. Решения СЛАУ – это вектор коэффициентов искомого уравнения второго порядка: a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1 и a_2.
4. По первым трем коэффициентам уравнения кривой второго порядка (a_{11}, a_{12}, и a_{22}) высчитывался инвариант D, знак которого определял, что мы получили – эллипс, гиперболу или параболу.
5. Функция if ведет подсчет выпавших гипербол, эллипсов и парабол.

В конце рисунка 2 показано, что при десяти миллионах бросаний пяти точек в квадрат гипербола (H) выпала 719 484 раз, эллипс (E) 280 516 раз, а парабола (P), как и ожидалось, ни разу.

Люди, получив обычную поздравительную открытку, как правило, читают сообщение в ней, переворачивают ее, любуются картинкой и… убирают открытку в альбом, ящик стола или в… мусорную корзину. Публикация же на форуме пользователей Mathcad новогодней открытки с гиперболами и эллипсами имело другие последствия:

1. Было высказано предположение, что открыта некая новая математическая константа 0.28… Ей даже то ли в шутку, то ли всерьез дали имя: V Points constant. V Points – это пять точек на «римском и английском». Но V. Points – это и обычный неправильный компьютерный перевод на английский язык имени автора данной статьи – В. Очков.
2. Один коллега автора с кафедры высшей математики МЭИ А. Г. Елисеев нашел способ аналитического, а не статистического (монте-карловского) подсчета данной константы. Он считает, что она равна π/12 (0.262…): отношение объема части прямого кругового конуса с радиусом основания r и высотой r, к объему прямоугольного параллелепипеда высотой r и квадратом в основании со стороной 2r, в который эта часть конуса вписана (рис. 3). Обсуждение и проверка этого доказательства было вынесено на сайт https://dxdy.ru/topic129587.html. Было показано, что оно относится к решению несколько иной задачи – не определение вероятности получения эллипса, проходящего через 5 точек в квадрате, а вероятности получения эллипса по квадратичному уравнению при разных значениях двух коэффициентов этого уравнения. Этим можно объяснить отличия в числах 0.262 и 0.282 – см. выше. Решение А. Г. Елисеева предполагает, что коэффициенты квадратичной формы распределены равномерно. С другой стороны, если равномерно распределены координаты точек, через которые проходит кривая 2-го порядка, то коэффициенты квадратичной формы, задающие эту

кривую, будут иметь более сложное распределение. Например, если величина f имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1], то величина f^2 будет с вероятностью 0.5 попадать в отрезок [0, 0.25] и с вероятностью 0.5 в отрезок [0.25, 1], то есть иметь уже не равномерное распределение. Кстати, если пять точек бросать не в квадрат, а в круг с единичным радиусом, то число 0.282 увеличится до 0.298.

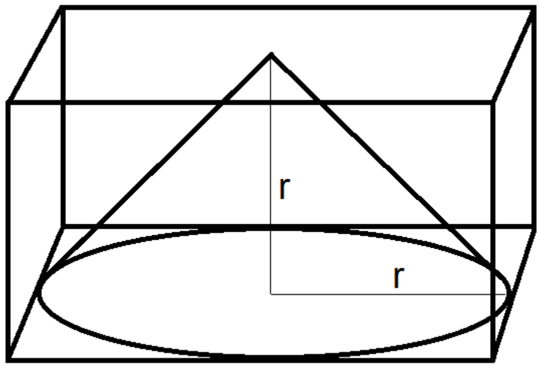

Рис. 3. Конус, вписанный в параллелепипед

3. Посетитель форума Mathcad Франк Парсель (Frank Purcell – Чикаго, США) высказал предположение, что эту константу можно определить (оценить) другим путем – решением задачи о четырех точках (IV points problem[2]), через которые проводятся две пересекающиеся параболы, которые разбивают квадратную область на некие зоны. См. https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Firecrackers-2018-or-5-th-order-curve-and-20-points/m-p/496511 и https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Hyperbola-and-Ellipse-new-math-constant/td-p/495992. Пятая случайная точка может попадать в одну из этих зон, которые определяют, что будет построено через эти пять точек – гипербола или парабола. Подсчет суммы площадей этих зон и даст нашу константу. Задача о четырех точках описана на сайте http://mathworld.wolfram.com (см. E. Weisstein’s article on Sylvester’s Four-Point Problem).
4. На форуме пользователей Mathcad началась некая гонка – кто бросит больше точек в квадрат, и кто сумеет провести через них кривую все более и более высокого порядка. Форумчане стали бросать в квадрат 9 точек (кривая третьего порядка – кубика), 14 точек (4-й порядок) и так далее до кривой… 50-го порядка (Werner Exinger) – см. на рис. 4 некоторые такие кривые.

[2] На плоскость случайным образом бросаются четыре точки и определяется, формируют ли они выпуклый четырехугольник или одна из точек находится внутри треугольника, образуемого тремя другими точками.

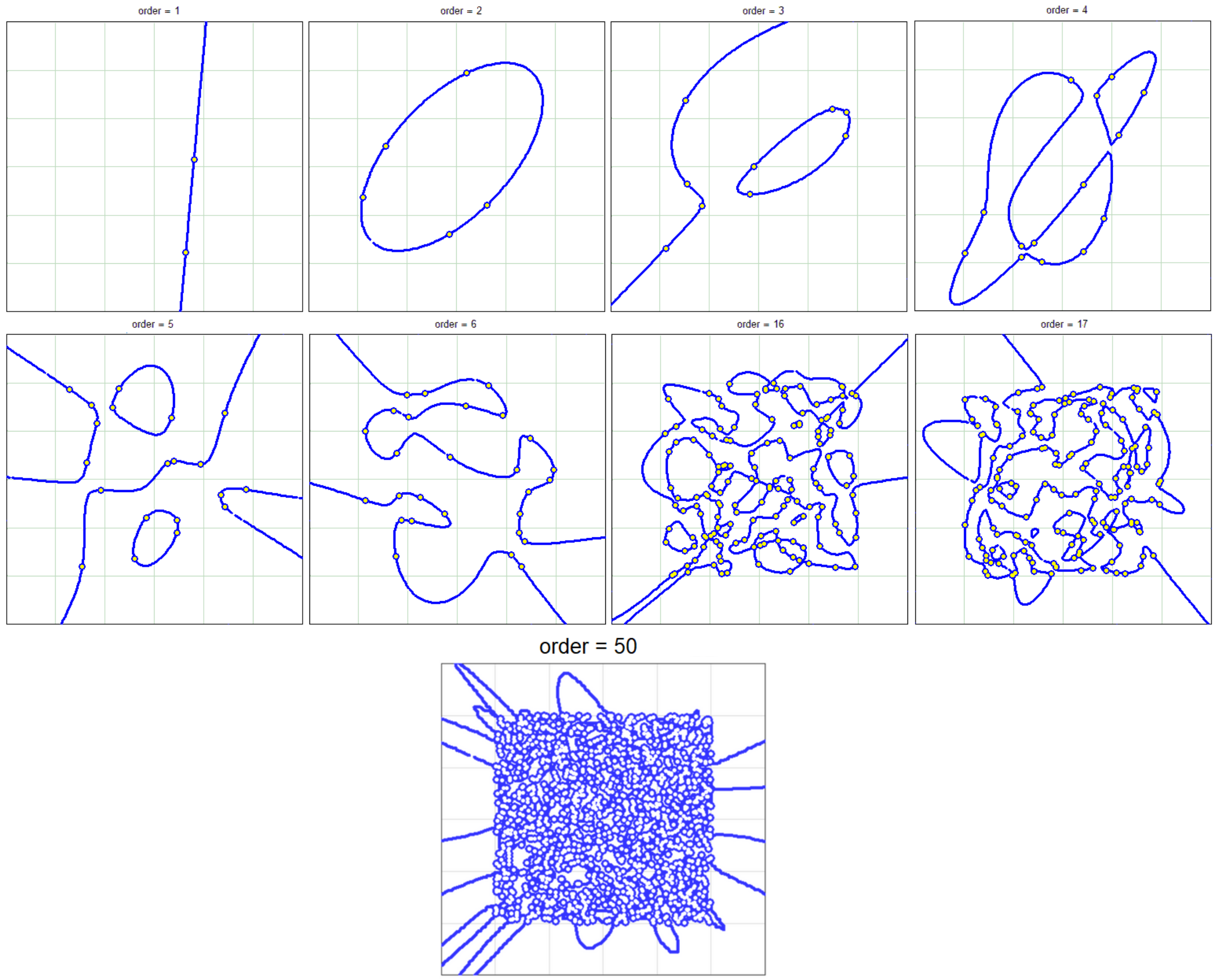

Рис. 4. Кривые разного порядка, проходящие через разное число точек, брошенных в квадрат

Но главный вывод, который был сделан из просмотра описываемой новогодней открытки, был такой.

Человек, столкнувшийся с новой математической или инженерной задачей, начинает искать средства ее решения. Сейчас к этой работе все чаще и чаще привлекается компьютер. Для компьютера ищутся нужные математические программы, а также встроенные или внешние процедуры и функции. Но можно поступить иначе – разместить задачу на специализированном форуме Интернета и не только решить ее, но и услышать разные толкования людей этой задачи и ее решения [4].

Вывод. Сделана попытка расчета новой математической константы, связанной с гиперболой и эллипсом. Предлагаем читателям доказать или опровергнуть существование данной константы, а также попытаться доказать наличие VI points, VII points, VIII points, IX points etc констант.

Но главный вывод в том, что задача, описанная статье – это интересная тема для учебного занятия на стыке математики и информатики. Она охватывает линейную алгебру, программирование, статистику, теорию вероятности, анимацию… Она лежит в русле современных образовательных технологий преподавания математики в инженерных вузах, подразумевающих широкое использование численных методов и реализации их в средах компьютерных математических программ с опорой на специализированные форумы Интернета (STEM – Science, Technology, Engineering and Mathematic).

Литература:

1. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. БИНОМ, 2011. (http://www.statmod.ru/wiki/_media/books:montecarlo_ermakov.pdf)
2. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). М.: Физматлит, 1960 (http://mexalib.com/view/20726)
3. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 556 с. (http://globalf5.com/Knigi/Nauka-Obrazovanie/Informatika/Matematicheskie-programmy/Fiziko-matematicheskie-etyudy-s_236485)
4. Очков В.Ф., Герк С. Активность на форумах – важная часть учебы и последующей инженерной деятельности студента // Открытое образование, № 5, 2014. С. 93-101 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Ochkov-Gurke-OE-5-2014.pdf)

Сведения об авторе:

Очков Валерий Федорович, д.т.н., профессор, профессор каф. Теоретических основ теплотехники НИУ «Московский энергетический институт», адрес: 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14, телефоны: служебный 495-362-71-71, сотовый 916-659-26-38, электронная почта ochkov@twt.mpei.ac.ru