

Путешествие от дома в школу по маршруту Ферма или Второе оптическое свойство гиперболы¹

В. Ф. Очков*, А. В. Соколов**, С. Д. Федорович*, Лук Мекес***

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14

**ГБОУ Лицей 1502 при МЭИ
ул. Молостовых, 10А, Москва, 111555

***Компания «Медтроник»
Нидерланды

e-mail: ochkov@twf.mpei.ac.ru

Аннотация. В статье рассмотрено решение задач оптимизации применительно к проблемам отражения и преломления луча света. Представлено численное и аналитическое решение алгебраических и дифференциальных уравнений линзы и фокусирующего зеркала в среде Mathcad. Показано, как современные программные средства могут легко и изящно решать оптические задачи. Аналитически решено обыкновенное дифференциальное уравнение плоско-выпуклой линзы. Подчеркнуто оптическое свойство гиперболы, базирующееся не на законе отражения, а на законе преломления света. Выведена формула коэффициента преломления материала плоскогиперболической линзы с совпадающими оптическим и геометрическим фокусами.

Ключевые слова: отражение и преломление света, оптический путь, принцип Ферма, принцип таутохронизма, закон Снеллиуса, пакет Mathcad, гипербола, парабола.

Дворник приколачивал к дому флаг.

Прохожий спросил, что это значит.

Дворник ответил: «Это значит, что в городе праздник».

«А какой это праздник?», — спросил прохожий.

«А праздник такой, что наш математик нашел еще одно свойство гиперболы», — ответил дворник.

Прохожий, устыженный своим незнанием, растворился в воздухе.

Даниил Хармс. «Праздник», новая редакция

Школьник или студент может добраться из дома или общежития до учебного заведения разными путями. Он может идти по улице, может пробираться через дворы и закоулки, может проехать часть дороги на общественном транспорте и т. д. Кратчайшее расстояние между двумя точками, как известно, прямая линия. Но да-

¹ Расчетные документы статьи можно скачать на <https://www.ptcusercommunity.com/message/465225>

леко не всегда можно и нужно перемещаться по прямой. Даже если нет явных препятствий в виде зданий, заборов и прочих преград, то перемещение по прямой даже в чистом поле не всегда оказывается самым оптимальным, если под оптимизацией понимать не сокращение расстояния, а минимизацию времени в пути. Ведь, ученики, опаздывая в школу, думают не о расстоянии, а о времени.

Давайте не будем голословными и для начала решим такую простенькую задачу: человек находится на открытой местности в точке А (рис. 1). Сгущаются тучи, гремит гром, вот-вот начнется гроза с ливнем... Нужно как можно быстрее добраться до точки В, где расположено некое укрытие: дом, беседка, навес... По какой траектории человеку бежать, если он стоит на газоне, перед домиком асфальт, а путь пересекает вспаханная полоса?

Эту типичную задачу оптимизации, где целевой функцией будет время перемещения от точки А к точке В, а переменными оптимизации — абсциссы точек С и D, мы решим в среде пакета Mathcad [1], который в настоящее время по ряду причин очень популярен у школьников, студентов, инженеров и научно-технических работников. Ординаты точек С и D заданы и отмечают прямые линии раздела участков «газон — пашня» и «пашня — асфальт», которые параллельны оси абсцисс. Скорость бега по газону (v_g), вспаханному полю (v_p) и асфальту (v_a) тоже заданы и, естественно, разные: $v_a > v_g > v_p$. Заданы также координаты начальной и конечной точек А и В.

На рисунке 1 показано решение этой задачи с использованием встроенной в Mathcad функции **Minimize**. У нее переменное число аргументов. В нашей задаче их три: имя целевой функции t (time) и имена двух переменных оптимизации x_C и x_D . Функция **Minimize** по особому численному алгоритму [1] будет автоматически менять значения переменных оптимизации x_C и x_D так, чтобы целевая функция приняла минимальное значение. Значения переменных x_C и x_D при проведении поиска изменяются от некоторых исходных (первое предположение — см. рис 1), которые задаются самим пользователем, исходя из «физики» задачи. При значениях x_C и x_D , взятых для первого предположения, время бега от точки А к точке В равно 2 мин 50 с, а минимизация с помощью функции **Minimize** дает значение 2 мин 31 с. Но возникают законные сомнения, минимум ли это, нет ли более оптимального маршрута бега по трем ломаным отрезкам прямой? Ответ проверяется построением контурного графика и двух сечений поверхности целевой функции в точке минимума: все верно — минимум найден: он окружен линиями одного уровня и расположен в точках минимума двух кривых сечений по двум переменным оптимизации. Кривые сечения тут лишние, но они будут необходимы, когда переменных оптимизации будет больше двух: человек, например, бежит по газону, пашне,

болоту и потом уже по асфальту (три, а не две границы раздела фаз, три переменные оптимизации). Эта задача хороша тем, что в ней легко можно увеличивать число переменных оптимизации.

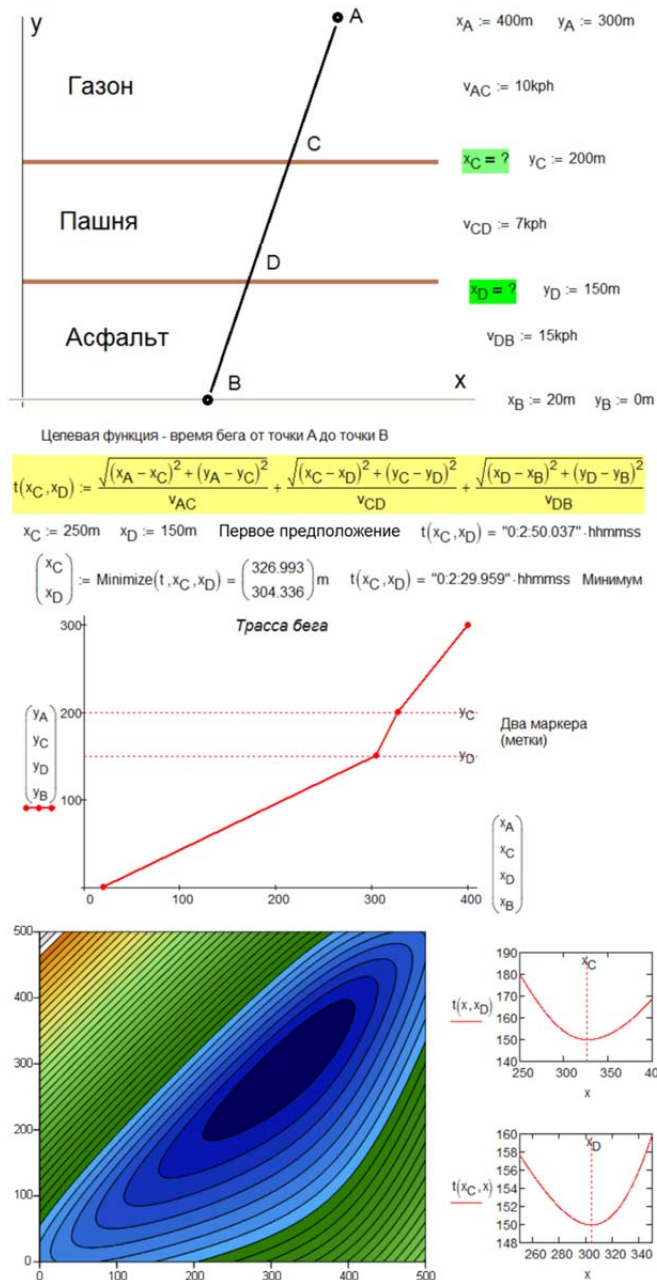


Рисунок 1. Задача о беге по газону, пашне и асфальту: оптимизация

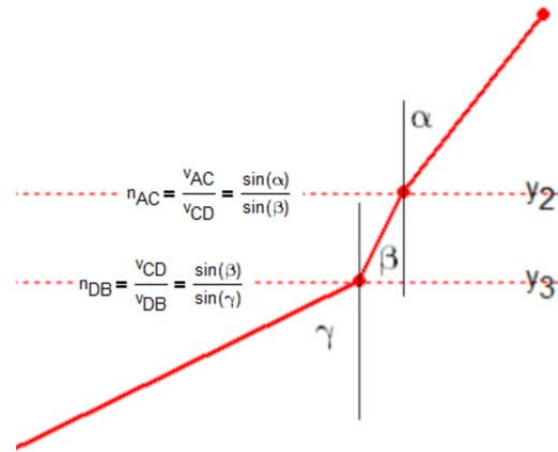
Примечание. Пакет Mathcad — это не просто математический, а физико-математический пакет. При решении задач он оперирует не просто величинами, а физическими величинами — расстоянием, скоростью, временем и т. д. [2], что очень удобно при решении математических задач с физическим содержанием (задач математической физики). Пакет Mathcad, кстати, умеет оперировать величинами, имеющими десятичные единицы измерения, что показано на рис. 1, где значение времени выдается в часах, минутах, секундах и тысячных долях секунд. Мелочь, но приятно! Более существенная и уникальная возможность Mathcad — это решение дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных) с физическими величинами, и мы этим воспользуемся ниже.

График в центре рис. 1 с ломаной кривой напоминает... «луч света в темном царстве» и заставляет вспомнить о знаменитом принципе геометрической оптики, сформулированном в 1662 году великим Ферма́: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время. Этот путь называется оптическим путем. Отсюда и изломы прямых линий, определяемые скоростями света в разных средах на границе раздела. Если одну скорость поделить на другую (смежную), то мы получим так называемый относительный коэффициент преломления n , численно равный отношению синуса угла падения к синусу угла преломления (закон Снеллиуса) [3, 4].

На рис. 2 показан другой подход решению задачи о беге по газону, пашне и асфальту, сводящийся к поиску не минимума функции двух аргументов, а корня системы двух нелинейных алгебраических уравнений²: отношение синусов углов на двух границах раздела равно отношению значений скоростей бега по обе стороны от границы. А синус угла — это, как известно, отношение длины противолежащего катета к гипотенузе, высчитываемой по теореме Пифагора.

Функция **Find**, задействованная в решении на рис. 2, опять же особым численным алгоритмом [1] с опорой на первое предположение так будет менять значения своих аргументов, чтобы система уравнений, записанная после ключевого слова **Given** (дано), превратилась в систему тождеств. Проверка правильности решения, как и на рис. 1 ведется графически: две кривые, соответствующие двум уравнениям системы, пересекаются в искомой точке (см. нижний график на рис. 2). И еще одна дополнительная проверка — сравнение ответов на рис. 1 и 2.

² Под алгебраическими уравнениями сейчас все чаще и чаще подразумевают не только собственно уравнения, куда входят полиномы, но и трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические) уравнения, отделяя их тем самым (словом "алгебраические") от дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и прочих экзотических уравнений. Такие уравнения сейчас решают в основном численно, а не аналитически, применяя один и тот же алгоритм для разных систем уравнений. Это еще одна причина такой терминологической неточности.



$x_A := 400\text{m}$	$y_A := 300\text{m}$	$v_{AC} := 10\text{kph}$
$x_C = ?$	$y_C := 200\text{m}$	$v_{CD} := 7\text{kph}$
$x_D = ?$	$y_D := 150\text{m}$	$v_{DB} := 15\text{kph}$
$x_B := 20\text{m}$	$y_B := 0\text{m}$	

$$n_{AC} := \frac{v_{AC}}{v_{CD}} = 1.429 \qquad n_{DB} := \frac{v_{CD}}{v_{DB}} = 0.467$$

$x_C := 200\text{m}$ $x_D := 150\text{m}$ Первое предположение

Given

$$\frac{\frac{x_A - x_C}{\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}}}{\frac{x_C - x_D}{\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}}} = n_{AC} \qquad \frac{\frac{x_C - x_D}{\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}}}{\frac{x_D - x_B}{\sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}}} = n_{DB}$$

$$\begin{pmatrix} x_C \\ x_D \end{pmatrix} := \text{Find}(x_C, x_D) = \begin{pmatrix} 326.993 \\ 304.336 \end{pmatrix} \text{m}$$

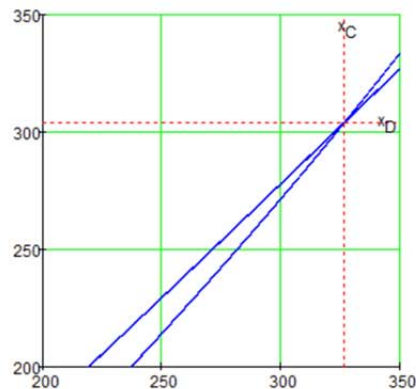


Рисунок 2. Задача о беге по газону, пашне и асфальту:
 решение системы двух «оптических» уравнений

Примечание. Скорость света в атмосфере и, следовательно, коэффициент преломления зависит от плотности воздуха, его температуры, влажности и других факторов. Из-за этого лучи света на небе могут как школьники «путешествовать» по весьма замысловатым маршрутам. Отсюда и миражи, какие можно видеть в пустыне или над гладью моря — см. рис. 3, где наблюдатель на берегу видит корабль («Летучий голландец») не на поверхности воды, а высоко в небе, де еще и перевернутым.

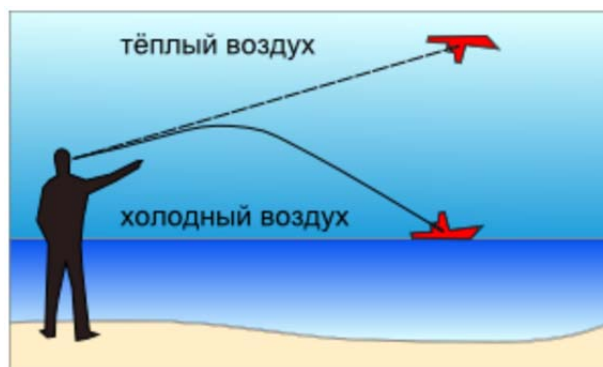


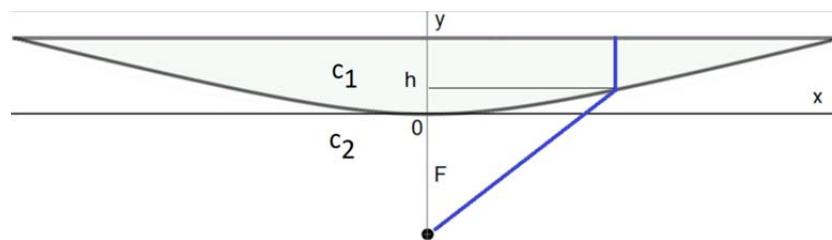
Рисунок 3. Физическое объяснение миража (взято из Интернета)

Рассмотрим финальный момент путешествия из дома в школу.

Школьники входят в ворота школы и направляются к ее дверям, что напоминает явление... фокусирования света линзой. Давайте смоделируем этот оптический прибор, опираясь еще на один важный принцип геометрической оптики, непосредственно вытекающий из принципа Ферма, — на принцип таутохронизма: оптические пути лучей света от точечного источника до его изображения одинаковы и свет затрачивает одно и то же время на прохождение этих оптических путей [3]. Пакет Mathcad элегантно и просто может решить и такую более сложную задачу о линзе — см. рис. 4.

Плоско-выпуклая линза (см. схему на рис. 4) имеет в центре толщину h и фокусное расстояние F . Линза сделана из прозрачного материала с относительным коэффициентом преломления n . Спрашивается: какую форму должна иметь нижняя поверхность линзы, чтобы параллельный пучок света, сошелся в фокусе? Левая часть уравнения на рис. 4 под схемой линзы, которое решается относительно переменной F , — это время прохождения света по оси X через стекло со скоростью c_1 (первое слагаемое) и через воздух со скоростью c_2 (второе слагаемое). Правая же часть — это время прохождения света уже не через центр линзы, а в произвольном месте, отстоящем от центра на расстоянии x . Тут также два слагаемых для стекла и

воздуха. Решение преобразуется так, чтобы можно было вычленить коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_1 , a_2 и a_0 , формирующие выражение для уравнения второго порядка. По этим коэффициентам высчитывается инварианта D и определитель Δ , значения которых указывают на то, что мы получили гиперболу, а не параболу или эллипс: значение F больше нуля (равно единице), а значение n больше единицы (равно двум).



$$\frac{h}{c_1} + \frac{F}{c_2} = \frac{h-y}{c_1} + \frac{\sqrt{(F+y)^2 + x^2}}{c_2} \xrightarrow[\text{solve, } F]{\text{substitute, } c_2 = n \cdot c_1} \frac{x^2 - n^2 \cdot y^2 + y^2}{2 \cdot y - 2 \cdot n \cdot y}$$

$$F = \frac{x^2 - n^2 \cdot y^2 + y^2}{2 \cdot n \cdot y - 2 \cdot y} \quad \text{или} \quad F \cdot (2 \cdot n \cdot y - 2 \cdot y) = x^2 - n^2 \cdot y^2 + y^2$$

$$2 F \cdot (n-1) \cdot y - x^2 + (n^2 - 1) \cdot y^2 = 0$$

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 a_1 \cdot x + 2 a_2 \cdot y + a_0 = 0$$

$$n := 2 \quad F := 1$$

$$a_{11} := -1 \quad a_{12} := 0 \quad a_{22} := n^2 - 1 \quad a_1 := 0 \quad a_2 := F \cdot (n-1) \quad a_0 := 0$$

$$D := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -3 \quad D < 0 \quad \Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta \neq 0 \quad \text{Hyperbola}$$

Рисунок 4. Вывод выражения для линзы с опорой на принцип таутохронизма

В задаче на рис. 4 пакет Mathcad помог нам решить исходное уравнение линзы относительно переменной F и рассчитать инварианту D и определитель Δ . Остальное (преобразование уравнения к стандартному виду плоской кривой второго порядка) делалось вручную. Это обычная практика работы в среде математических программ, позволяющая оптимальным образом решать задачи, сочетая скорость и быстроедействие компьютера со смекалкой человека.

Известно, что гипербола обладает таким «отражательным» оптическим свойством: луч, исходящий из источника света, находящегося в фокусе F_1 первой ветви гиперболы, после отражения от второй ветви гиперболы направлен так, как будто он исходит из фокуса F_2 второй ветви гиперболы — см. рис 5, поясняющий это. (На этом рисунке изображение гиперболы повернуто на 90 градусов и сдвинуто

начало координат. Это требует каноническая форма записи уравнения гиперболы. К закону отражения света мы вернемся чуть ниже.)

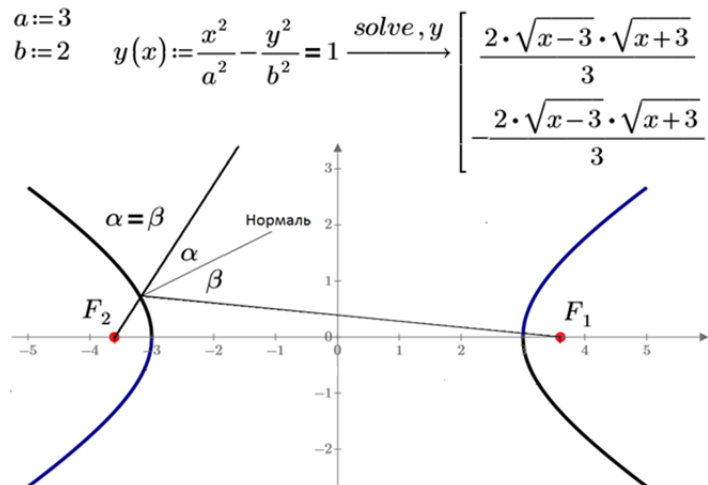


Рисунок 5. Отражательное свойство гиперболы

Выкладки на рис. 4 дают основание говорить и о «преломляющем» оптическом свойстве гиперболы: параллельный пучок света, пройдя через плоско-выпуклую линзу, сойдется в одной точке, если в выпуклой поверхности линзы «сидит» гипербола — см. рис. 5. Наша линза не просто плоско-выпуклая, а плоскогиперболическая [4].

Примечание. «Отражательное» свойство гиперболы (рис. 5) прописано почти во всех справочниках (бумажных и электронных), где дается информация об этой кривой второго порядка. А вот об «преломляющем» свойстве гиперболы (рис. 4) эти справочники молчат. Это можно объяснить тем, что закон отражения света прост и понятен — угол падения равен углу отражения (см. ниже) без особых оговорок. С преломлением же света не все так просто. Коэффициент преломления света n мы рассматривали как константу, не зависящую ни от длины волны луча света (явление хроматической аберрации), ни от интенсивности светового потока, ни от положения луча в преломляющей субстанции. Но тут впору вспомнить стеклянную призму, которая разлагает белый свет на цветовые составляющие и помогает, например, определять состав вещества методами спектроскопии. Это позволило, например, найти гелий сначала на Солнце, а только потом в атмосфере Земли. Нужно всегда помнить о том, что реальные линзы сводят пучок света не в точку, а в некий радужный сгусток световой энергии, с которым играют солнечными днями мальчишки, выжигая

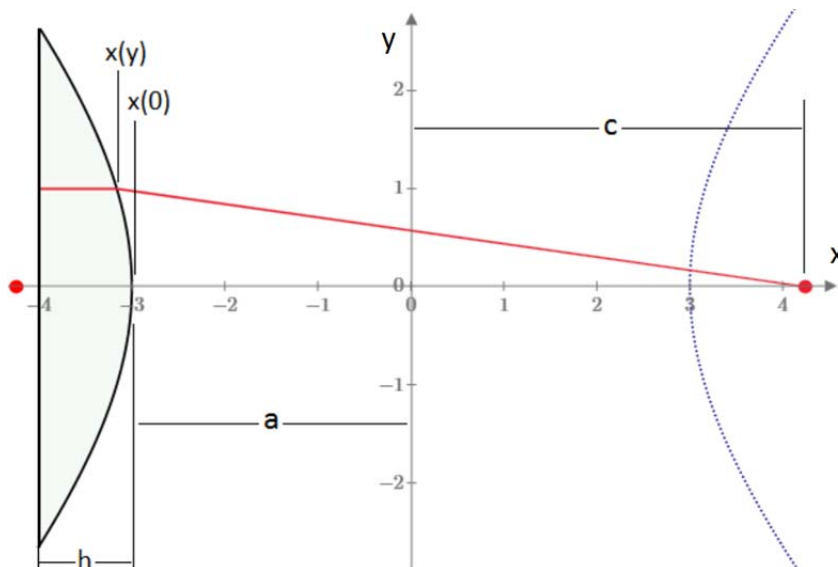
на дереве всякие фигурки. Герои романа Жюль Верна «Таинственный остров», например, добыли огонь с помощью двух стекол, снятых с часов (см. сноску 3). Эту импровизированную линзу они наполнили водой и скрепили ее края глиной. Так было сделано настоящее зажигательное стекло, которое сосредоточило лучи солнца на охапке сухого мха и воспламенило его. Почему мало упоминаются гиперболы в их связи с линзами? Дело тут в значительных несферических абберациях (хроматическая абберация, коматическая абберация) несферических линз при больших диаметрах («апертурах»). При малых же диаметрах линз их гиперболическая поверхность аппроксимируются первым квадратичным членом и превращаются в сферическую.

Итак, у гиперболы есть два фокуса, а у плоскогиперболической линзы — свой оптический фокус. Как они соотносятся. При каком значении коэффициента преломления материала такой линзы два эти фокуса совпадут?

На рис. 6 показана попытка решения этой новой задачи с опорой на тот же принцип таутохронизма. Уравнение времени на прохождение светом двух оптических путей взято из рис. 4, но линза, как и на рис. 5 повернута на 90 градусов. Кроме того, начало координат на рис. 4 и 6 разное. Это сделано опять же для того, чтобы можно было работать с канонической формой записи гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. В уравнение на рис. 6 вставлено фокусное расстояние, равное сумме двух важных параметров гиперболы $a + c$. Уравнение после соответствующих замен переменных решается относительно переменной n — коэффициента преломления материала линзы. Получена формула, в которую входит переменная y , которая в принципе не должна влиять на значение n . Численное исследование функции $n(a, b)$ показывает, что коэффициент преломления материала нашей линзы не зависит от значения переменной y , а у линзы, образованной равнобочной гиперболой, где $a = b$, этот коэффициент равен квадратному корню из двух. При расчетах по формуле для $n(a, b)$ значение y можно принимать за единицу или за единичный метр, если учитываются единицы измерения в формуле. Но дальнейший анализ формулы на рис. 6 показал, что она численно совпадает с формулой для еще одной важной характеристики гиперболы — эксцентриситет (ϵ). В расчете на рис. 7 показаны две поверхности, построенные по двум функциям двух аргументов, которые совпали.

Строгое аналитическое доказательство того, что коэффициент преломления линзы равен эксцентриситету соответствующей гиперболы показано на рис. 8. Для этого пришлось ввести в схему линзы некоторые дополнительные обозначения. d_1 и d_2 — директрисы гиперболы; ρ_1 и ρ_2 — расстояния от произвольной точки гиперболы до директрисы; r_1 и r_2 — т. н. фокальный радиус (расстояние от произ-

вольной точки гиперболы до фокуса. По одному из свойств гиперболы для любой точки гиперболы отношение ее фокального радиуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная равная эксцентриситету. Но суть решения осталась прежней: поиск корня уравнения оптических путей лучей света.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{solve, } x} \begin{bmatrix} \frac{a \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}{b} \\ \frac{a \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}{b} \end{bmatrix} \quad x(y) = -\frac{a \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}{b} \quad x(0) = -a \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{h}{c_1} + \frac{a+c}{c_2} = \frac{h - \left(-a + \frac{a \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}{b}\right)}{c_1} + \frac{\sqrt{y^2 + \left(a+c + \left(-a + \frac{a \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}{b}\right)\right)^2}}{c_2} \xrightarrow{\text{substitute, } c_2 = n \cdot c_1}$$

$$\xrightarrow{\text{substitute, } c = \sqrt{a^2 + b^2}} \frac{b \cdot \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{2 \cdot a^2 + b^2 + y^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 + \frac{2 \cdot a}{b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}\right)}{a \cdot (b - \sqrt{b^2 + y^2})} \xrightarrow{\text{solve, } n}$$

$$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad n(a, b) := \frac{b \cdot \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{2 \cdot a^2 + b^2 + y^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 + \frac{2 \cdot a}{b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + y^2}}\right)}{a \cdot (b - \sqrt{b^2 + y^2})} \xrightarrow{\text{simplify, max}}$$

$$n(4, 4) = \begin{bmatrix} 1.414 \\ 1.414 \\ 1.414 \end{bmatrix} \quad n(2, 3) = \begin{bmatrix} 1.803 \\ 1.803 \\ 1.803 \end{bmatrix} \quad n(3, 2) = \begin{bmatrix} 1.202 \\ 1.202 \\ 1.202 \end{bmatrix}$$

Рисунок 6. Расчет плоскогиперболической линзы с совпадающим оптическим и геометрическим фокусами

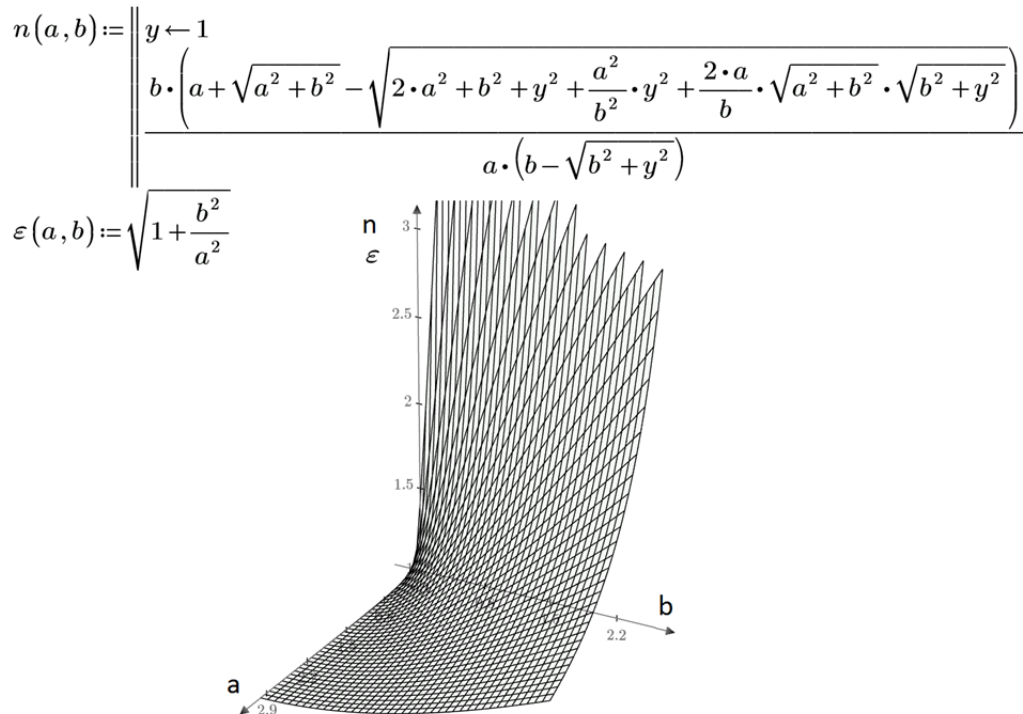


Рисунок 7. Коэффициент преломления и эксцентриситет гиперболы

Исходя из расчетов на рис. 6, 7 и 8, можно еще раз и более точно сформулировать второе оптическое свойство гиперболы. Параллельный пучок света, пройдя через плоско-выпуклую линзу, сойдется в одной точке, если выпуклую поверхность линзы определяет одна из ветвей гиперболы. Если при этом коэффициент преломления материала линзы численно совпадает с эксцентриситетом гиперболы, то оптический фокус такой плоскогиперболической линзы совпадет с геометрическим фокусом второй ветви гиперболы.

Рис. 9 поясняет это новое второе «преломляющее» свойство гиперболы.

Идея для сувенира с математическим смыслом. Можно изготовить плоскогиперболическую линзу с эксцентриситетом гиперболы, равным показателю преломления стекла. Эту линзу нужно вставить в оправу, на футляре которой выгравированы вышеприведенные выкладки и пояснения к ним. Получится лупа для математика, (физика, оптика...), который будет ею пользоваться при чтении математических и физических справочников с мелким шрифтом. Практической пользы от такой линзы никакой, но такой «артобъект» будет очень занимательным для интересующихся физикой и математикой. А в комнате повесить картину в цвете из рис. 1 (контурный график), назвав ее «Супрематическая линза». Еще лучше подобрать

(«сварить») для такой линзы оптическое стекло с коэффициентом преломления, равным квадратному корню их двух (1.414...). В этом случае поверхность линзы будет определять равнобочная гипербола.

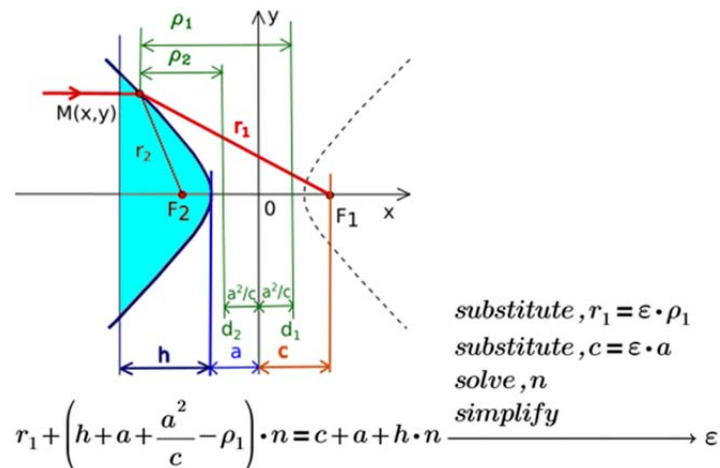


Рисунок 8. Строгое доказательство верности второго оптического свойства гиперболы

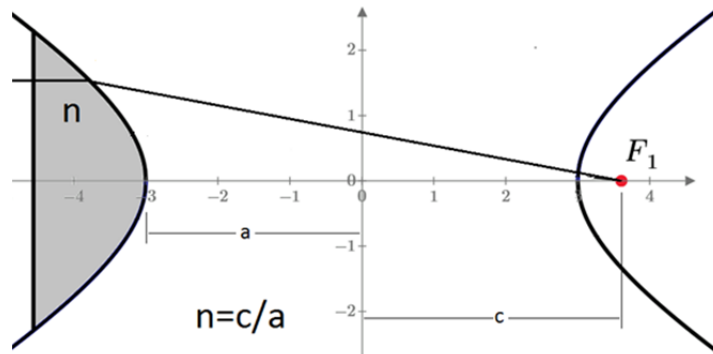


Рисунок 9. Второе оптическое свойство гиперболы

Пакет Mathcad может решать не только алгебраические (см. рис. 2, 4 и 8), но и дифференциальные уравнения. Правда, не аналитически, а только численно. На рис. 10 показано решение нашей задачи о плоско-выпуклой линзе через составление системы уравнений — одного дифференциального и двух алгебраических.

Первое алгебраическое уравнение на рис. 10 — это математическая запись закона Снеллиуса с коэффициентом преломления n , который мы уже задействовали в решении на рис. 4, а второе выражает тангенс «нижнего» угла $\beta - \alpha$ через отношения длины противолежащего катета x к длине прилежащего катета $F + y(x)$. Диф-

дифференциальное же уравнение — это геометрическая интерпретация производной функции одного аргумента.

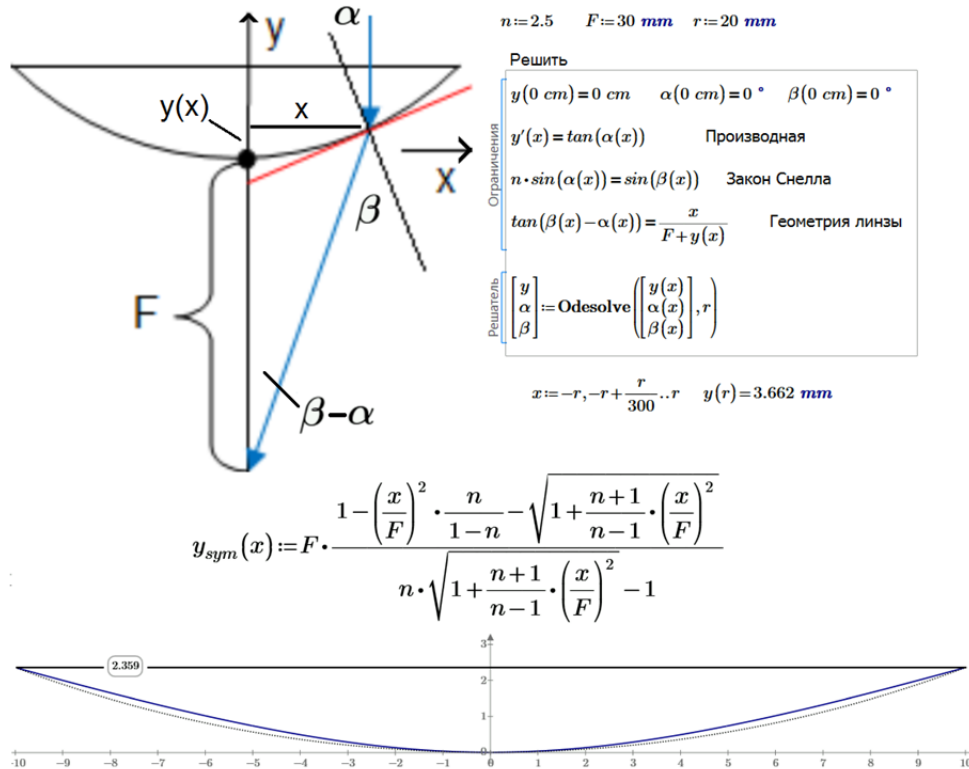


Рисунок 10. Решение дифференциального уравнения линзы

Примечание. Мы плоскую сторону линзы на рис. 10 намерено повернули вверх (см. также рис. 4) для упрощения задачи. На сайте с файлами статьи читатель найдет решение и для линзы, повернутой выпуклой стороной вверх — к параллельному пучку лучей света. Так обычно и поступают, выжигая, например, в солнечный день на дереве с помощью плоско-выпуклой линзы [5]. При таком положении линзы нужно будет рассматривать преломление луча света не один, а два раза — на границах «воздух-стекло» и «стекло-воздух»³. В случае, показанном на рисунках 4 и 10, преломление света происходит только на нижней поверхности.

³ В прошлом веке во многих семьях были линзы с четырьмя границами раздела сред "воздух-стекло (вернее, оргстекло)", "воздух-жидкость", "жидкость-стекло" и "стекло-воздух". Их ставили перед телевизорами, экраны которых в те времена были чуть больше почтовой открытки (см. <https://www.ptcusercommunity.com/thread/130193>). Наполняли же эти линзы водой или глицерином, у которого коэффициент преломления выше.

И еще один уточняющий момент. Мы рассматриваем не объемную, а плоскую задачу. Форма линзы — это поверхность, полученная вращением найденной плоской кривой вокруг оси ординат, что часто забывают отметить.

Линза, которая должна собрать параллельный пучок света в фокусе, не имеет сферической формы, она, как говорят оптики, асферическая (асфера — это несфера): см. график на рис. 10, где под найденной кривой линзы $y(x)$ дополнительно пунктиром прорисована дуга окружности, проходящая через нижнюю точку линзы и ее края. Асферические линзы обычно изготавливаются так: вращающуюся сферическую заготовку (см. пунктирную линию на рис. 10) шлифуют до получения нужной асферической формы (см. сплошную линию на рис. 10). Но, тем не менее, почти вся школьная и вузовская оптика, как часть учебной дисциплины «Физика», пользуется допущением, что линзы имеют сферические поверхности, а сам процесс обучения направлен не на освоение базовых понятий оптики, основанных на общих физических законах, а на вывод или заучивание готовых формул для расчета фокусных расстояний, диоптрий, коэффициентов увеличения/уменьшения, аберраций и прочих сугубо профессиональных оптических характеристик и явлений. Вернее, так. Школьная физика просто рассматривает априори такую поверхность линз, которая обеспечивает схождение парааксиального пучка в точке, называемой фокусом. Задача нахождения формы этой поверхности для широкого пучка просто не ставится. И это понятно: когда развивалась наука «Геометрическая оптика» и создавались соответствующие учебные курсы не было удобных, простых и доступных средств решения уравнений — алгебраических и дифференциальных. Теперь же они есть и это позволяет менять методику и содержание учебной дисциплины «Оптика».

Сплошная кривая на графике рис. 10 — это не одна кривая, а целых три, которые слились в одну. Первая кривая $y(x)$ отображает численное решение задачи посредством встроенной в Mathcad функции **Odesolve**, вторая — формулу (гиперболлу), найденную решением на рис. 4, а третья $y_{sym}(x)$ — аналитическое (символьное) решение системы дифференциального-алгебраических уравнения, показанной на рис. 10. Эту «страшную» формулу для функции $y_{sym}(x)$ вывел соавтор статьи из Голландии — родины великого Христиана Гюйгенса, внесшего большой вклад и в развитие оптики. У этого соавтора была старая добрая 11-я версия Mathcad с символьным движком от Maple, а не от MuPAD, что и позволило решить задачу. Ну и, конечно, помог тут интеллект и сноровка голландца. А дело было так. Необходимо было найти асимптоты сплошной, «численной» кривой на рис. 10, т. е. найти конус, в который будет вписываться линза при бесконечном увеличении ее диаметра при фиксированном фокусе. Еще, кстати, не было известно, что это гипербола. Нахождение предела выражения $y(x)/x$ оказалось невозможным, т.к. «численная» функция $y(x)$ определена только в оговоренном диапазоне от центра линзы до ее края. Да

и вообще, функция $y(x)$ — это не «настоящая» функция, а некая псевдофункция, созданная интерполяцией табличных значений, сгенерированных численным методом решения обыкновенного дифференциального уравнения. Задача о конусе линзы была вывешена на форуме пользователей Mathcad. На запрос и откликнулся Лук Мекес, который решил задачу кардинально — нашел аналитическое решение, а у полученного выражения определил требуемые асимптоты: см. <https://www.ptcusercommunity.com/thread/130129>. Формулы на рис. 4 и 8 отличаются видом, но это одна и та же зависимость, в чем мы уже убедились, построив совпадающие графики.

Если при решении оптических задач с линзами допустить, что синус и тангенс угла равны самому углу (а это, как известно, можно делать при малых значениях углов⁴), то решение существенно упрощается⁵ и, главное, становятся доступными многие аналитические и матричные решения, на которых базируются большинство оптических формул и которыми «мучают бедных школьников и студентов». Замена синусов углов в уравнении Снеллиуса на сами углы позволит свести три уравнения на рисунке 10 к одному дифференциальному уравнению

$$y'(x)(n-1) = \frac{x}{F+y(x)};$$
$$y(0) = 0,$$

которое несложно решить аналитически (например, через разделение переменных или непосредственно через сайт Интернета), а также, конечно, и численно (в среде Mathcad). Эти решения размещены на сайте с файлами статьи.

Оптический принцип Ферма можно приложить и к другому важному закону — закону отражения света. На рис. 11 показано аналитическое решение задачи о минимуме времени прохождения луча света от точки 1 к отражающей поверхности (точка 2) и далее к точке 3. Создается целевая функция t с аргументом x (горизонтальный отступ точки 2 от точки 1), у которой ищется значение аргумента, при котором производная равна нулю. Ведь, если функция гладкая и непрерывная, то в точке ее минимума производная равна нулю. Выкладки на рис. 11 показывают, что минимум функции $t(x)$ имеет место тогда, когда тангенс угла падения α равен тангенсу угла отражения β . Следовательно, и угол α равен углу β . Кстати, отражение и преломление «идут рука об руку»: свет, падая, например, на стеклянную поверх-

⁴ Такое допущение, кстати говоря, делается и при рассмотрении математического маятника, нить которого отклоняется от горизонтали на угол, значение которого не превышает 5–7 градусов. Многие помнят формулу периода колебания маятника, но мало кто знает, что она относится к математическому, а не физическому маятнику.

⁵ В задачах на рис. 2 и 4, кстати говоря, такое упрощение усложнит решение — придется вводить в расчет арксинус.

ность частично отражается, а частично уходит с преломлением вглубь стекла, и соотношение этих частей зависит от угла падения.

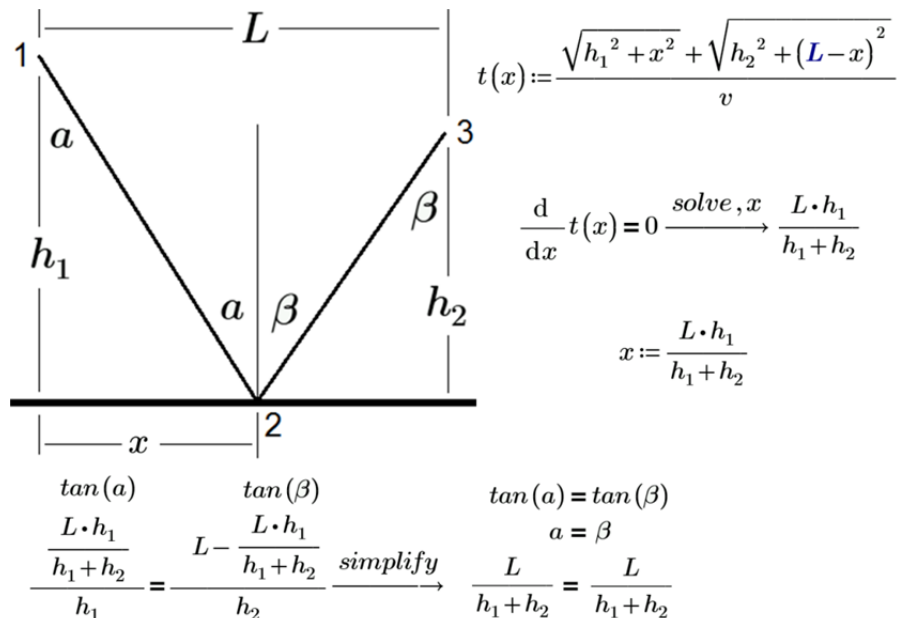


Рисунок 11. Доказательство закона отражения света

Есть такой роман Алексея Толстого «Гиперболоид инженера Гарина». Один из изобретателей лазера, нобелевский лауреат Чарльз Таунс признался, что на создание этого устройства его вдохновил английский перевод этого романа «The Garin Death Ray». В Википедии можно прочесть, что «более правильное название устройства Гарина — параболоид. Толстой знал об этом, однако выбрал слово «гиперболоид» из-за более внушительного звучания». Но в этом устройстве могли быть не только зеркала, но и линзы — плоскогиперболические, например. Тогда название романа вполне оправдано.

Гиперболоид, вернее, гиперболу, обрисовывающую нижний край линзы, мы уже смоделировали. Давайте смоделируем и параболоид — параболическое вогнутое зеркало (см. рис. 12).

На рис. 12 фактически повторены выкладки, показанные на рис. 4, но не для фокусирующей плоско-выпуклой линзы, а для фокусирующего вогнутого зеркала. Выкладки на рис. 12 выдали не гиперболу, а параболу, у которой есть и другое неоптическое геометрическое толкование. Если на плоскости нарисовать прямую и поставить возле нее точку, то парабола — это геометрическое место точек, равноудаленных от заданной прямой (ее называют директрисой параболы) и заданной

точкой (ее называют фокусом параболы). если же не будет равноудаленности (отношение расстояния от точек кривой до фокуса и от точек кривой до директрисы не будет равно единице), то мы получим другие две плоские кривые второго порядка: эллипс (эксцентриситет меньше единицы) или наш случай – две ветви гиперболы (эксцентриситет больше единицы). Интересно будет поработать с «линзами», материал которых имеет коэффициент преломления меньше единицы: в массиве стекла находится пузырек воздуха в виде эллипсоида, шара или какого-то другого тела. Гиперболу, параболу и не рассмотренный в этой статье эллипс называют коническими кривыми так как они получаются при рассечении прямого кругового конуса плоскостью. По эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам, кстати, движутся небесные тела, за которыми мы следим с помощью зеркальных и линзовых телескопов [6]. Преобразованию этих кривых к каноническому виду, у которого не шесть (см. выше рис. 4 и 12), всего лишь два (гипербола и эллипс) или даже один (парабола, окружность, как частный случай эллипса) коэффициент, уделяется много внимания в вузовской математике.

$$F+h = \sqrt{(F-y)^2 + x^2} + h-y \xrightarrow{\text{solve, } y} \frac{x^2}{4 \cdot F}$$

$$y - \frac{1}{4F} \cdot x^2 = 0 \quad F := 1$$

$$a_{11} := -\frac{1}{4F} \quad a_{12} := 0 \quad a_{22} := 0 \quad a_1 := 0 \quad a_2 := \frac{1}{2} \quad a_0 := 0$$

$$D := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad D = 0 \quad \Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 0.063 \quad \Delta \neq 0$$

$$f(x, y) := a_{11} \cdot x^2 + a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 a_1 \cdot x + 2 a_2 \cdot y + a_0$$

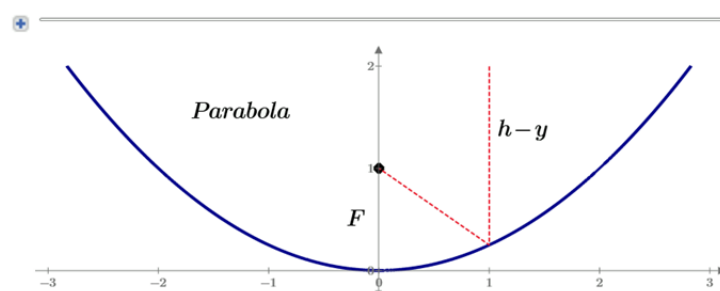


Рисунок 12. Вывод уравнения параболического зеркала

Примечание. Параболу, вернее, параболоид (поверхность, полученную вращением параболы вокруг оси, перпендикулярной директрисе и проходящей через фокус) можно увидеть не только на стенах домов, где смотрят спутниковое ТВ, но и... зимой на ледяных горках. Дело в том, что-когда-то давно одному заво-

ду, выпускающему такие антенны для нужд военных, поручили изготавливать и конверсионную продукцию. Руководство завода недолго думая решило прикрепить к этой тарелке две кожаные петли. Получилась отличная ледянка. А вот еще один возможный товар народного потребления с «параболой внутри», идея еще одного «артобъекта»: стеклянная или фарфоровая ваза для фруктов в виде параболоида, с круглой подставкой-директрисой и ножкой, пронизывающей в центре параболоид и заканчивающейся в фокусе ручкой. Такая ваза будет хорошо смотреться в доме математика — будет о чем поговорить с гостями за столом. Ее можно расписать не традиционными узорами, а математическими выкладками, связанными с параболой или гиперболой [7]. А сами узоры можно рассматривать с помощью вышеописанной «математической» лупы.

Форму фокусирующего зеркала, как и форму линзы можно найти через решение не алгебраического, а дифференциального уравнения — см. рис. 13, 14, 15 и 16.

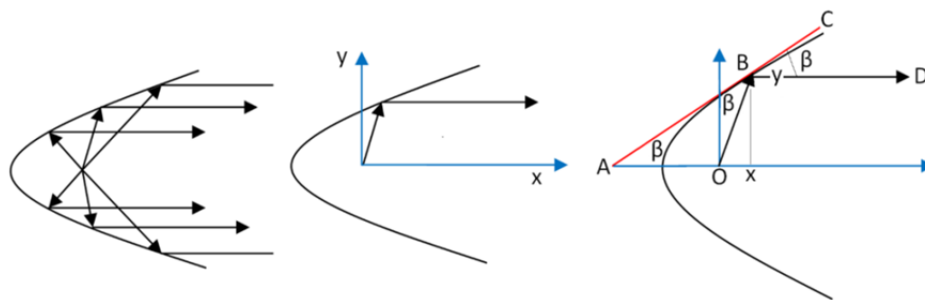


Рисунок 13. Схема зеркала прожектора

В приближении геометрической оптики, т. е. пренебрегая всеми волновыми световыми явлениями и заменяя реальный световой поток с его корпускулярно-волновым дуализмом большим количеством лучей (см. левую схему на рис. 13), выведем форму отражающей поверхности зеркала, при которой лучи исходящие из одной точки (из фокуса) после отражения от зеркала превратятся в параллельный пучок лучей. Рассмотрим один из таких лучей (средняя схема). Введем оси координат x (горизонталь) и y (вертикаль). Определим, какой функции $y(x)$ должна отвечать поверхность зеркала, вернее, одна линия (сечение) на этой поверхности в указанных осях координат. Это можно сделать, если на правой схеме рисунка 13 выделить два треугольника — один с вершинами ABO , а второй с вершинами OBx , у которых одна общая сторона OB . Эта «общность сторон» и позволит нам вывести дифференциальное уравнение фокусирующего вогнутого зеркала.

На поверхности зеркала выполняется закон отражения (см. рис. 8 и правую схему на рис. 13): угол ABO равен углу CBD (обозначим эти углы как β). С другой

стороны, угол CBD равен углу BAO, т.к. луч BD параллелен оси x. Следовательно, треугольник ABO равнобедренный: длина его стороны AO равна длине стороны OB (следствие закона отражения лучей). Поскольку точка B имеет координаты x и y, то исходя из определения тангенса (отношение катета противолежащего к катету прилежащему): $\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{AO+x}$, следовательно $AO = \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} - x$, но (вспомним о геометрической сути производной) $\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx}$, поэтому $AO = \frac{y}{dy/dx} - x$. С другой стороны из теоремы Пифагора следует, что $OB = \sqrt{y^2 + x^2}$. Получаем уравнение, в котором присутствует производная функции, т. е. дифференциальное уравнение:

$$\frac{y}{dy/dx} - x = \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Введем дополнительное обозначение для значения x при y равном нулю: $y(F) = 0$. Решим полученное дифференциальное уравнение аналитически (рис. 14 — сайт wolframalpha.com) и численно (рис. 15 — Mathcad).

На графике рис. 16 прорисованы две совпадающие кривые — одна толстая $y(x)$ и другая тонкая $y_{\text{sym}}(x)$ внутри толстой для визуальной проверки правильности численного решения. Такой прием мы уже использовали в решении на рис. 10. Если на рис. 16 дорисовать нижнюю половинку кривой и поменять местами оси, то и получится искомая парабола вида $x^2/(4F) - F$: будет доказано еще раз (см. рис. 12), что наше вогнутое фокусирующее зеркало — это параболоид, а не гиперболоид.

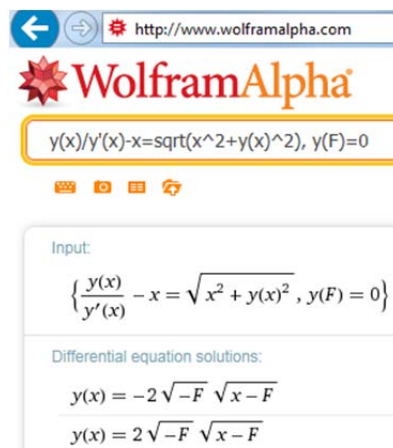


Рисунок 14. Аналитическое сетевое решение дифференциального уравнения вогнутого зеркала

$$F := 1 \text{ cm} \quad x_{end} := -0.07 F = -0.07 \text{ cm} \quad x := -F, -F + \frac{F + x_{end}}{1000} \dots x_{end}$$

$$\begin{aligned} y(-F) &= 0 \text{ cm} & R(-F) &= F & \alpha(-F) &= 0^\circ & \beta(-F) &= 0^\circ \\ y'(x) &= \tan(90^\circ - \beta(x)) & R(x)^2 &= x^2 + y(x)^2 \\ \beta(x) &= \frac{\alpha(x)}{2} & \sin(\alpha(x)) &= \frac{y(x)}{R(x)} \\ \begin{bmatrix} y \\ R \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &:= \text{odesolve} \left(\begin{bmatrix} y(x) \\ R(x) \\ \alpha(x) \\ \beta(x) \end{bmatrix}, x_{end} \right) \end{aligned}$$

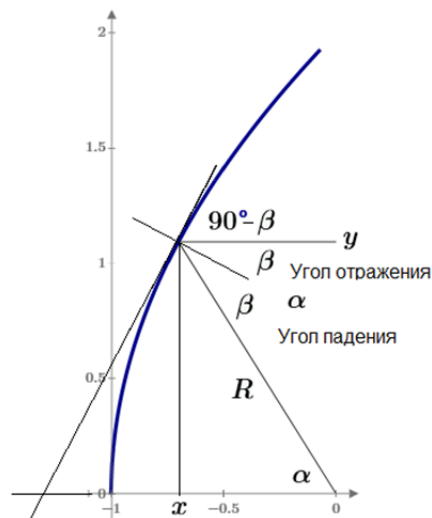


Рисунок 15. Численное решение в среде Mathcad системы одного дифференциального и четырех алгебраических уравнений

Примечание. Начальным условием численного решения задачи о вогнутом зеркале на рис. 16 стоит не $y(F) = 0$ см (нулевая длина), а $y(F) = 1$ nm (один нанометр). Если бы там стоял нуль, а не величина близкая к нулю, то задача не решалась бы численно из-за того, что производная в этой точке равна бесконечности. Пришлось чуть-чуть схитрить и обмануть компьютер. Можно сказать, что нанотехнологии помогли нам решить эту задачу! Шутки шутками, но полировка с ювелирной точностью линз и зеркал для телескопов, покрытие поверхности линз ровным слоем светоотражающего материала — это настоящая нанотехнология, возникшая задолго до появления этого слова. Можно было «схитрить» и по-иному — поменять оси. Тогда производная функции в нулевой точке была бы равна нулю, а не бесконечности.

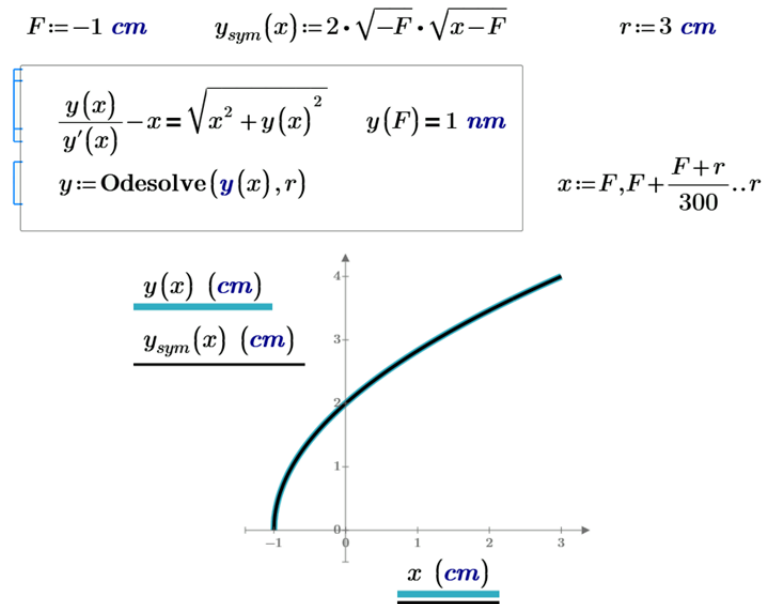


Рисунок 16. Численное решение уравнения вогнутого зеркала
 и сравнение его с аналитическим

Пакет Mathcad, повторяем, может численно решать не только одиночные дифференциальные уравнения (см. пример на рис. 16), которые еще нужно уметь вывести, но и системы, в которые входят и дифференциальные и алгебраические уравнения. Это в ряде случаев упрощает составление математических моделей. Так на рисунке 16 показано численное решение задачи о форме вогнутого зеркала, в математическую модель которого вложены следующие наши элементарные знания предмета: производная функции равна тангенсу наклона касательной (первое уравнение), квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (2), угол падения равен углу отражения (3) и, наконец, синус — это отношение противолежащего катета к гипотенузе (4). Все эти четыре уравнения при желании можно собрать в одно и получить уравнение, показанное на рис. 14 и 16, выведенное анализом правой схемы на рис. 13. Но лучше поручить эту возню с отдельными уравнениями компьютеру — см. рис. 15. Лучше и в том плане, что развернутая модель открыта для возможных изменений. Можно, например, в третьем уравнении двойку в знаменателе заменить на... тройку и сказать, что поверхность зеркала обладает таким необычным свойством: угол падения в два раза больше угла отражения или наоборот. Ведь есть и необычные зеркала — такие, какие, например, отбрасывают лучи света строго в сторону источника. Такое «зеркало» получается, если обычные плоские зеркала

ла расположить друг к другу под прямым углом⁶. Этим свойством обладают так называемые уголкового отражатели и катафоты, которые устанавливают на автомобилях и велосипедах. Можно также представить себе зеркало, у которого синус угла падения равен... косинусу угла отражения, и поиграть с этой моделью — найти форму фокусирующего зеркала с такой полуфантастической отражающей поверхностью...

Примечание. В схемах, показанных на рис. 15 и 16, оси абсцисс проходят через разные точки — через фокус (рис. 16) или через нулевую точку (рис. 15). Выбор системы координат (декартова, полярная, цилиндрическая, сферическая и проч.), начальной точки расположения осей — это важный этап решения задачи, часто определяющий успех этого дела.

Выводы. Оптика присутствует не только в учебниках и задачниках по физике, но и в художественной литературе. Вспомним не только Жюль Верна (см. выше), но пушкинское «Всё хлопает. Онегин входит, / Идет меж кресел по ногам, / Двойной лорнет скосясь наводит / На ложи незнакомых дам.». Или рассказ Василия Шукшина «Микроскоп», а также басню Крылова «Мартышка и очки». Да что там далеко ходить! Глаза, через которые человек получает основную долю информации об окружающем мире (читает, например, эту статью), это ни что иное, как совершеннейшие оптические приборы, которые мы часто подправляем и усиливаем рукотворными оптическими устройствами: моноклем, лорнетом, пенсне, очками, подзорной трубой, биноклем, перископом, микроскопом, телескопом и т. д. Сочетая математику, физику и литературу (базовые школьные предметы) с современными информационными технологиями, можно успешно и, главное, с интересом решать довольно сложные оптические задачи, попутно изучая законы физики.

Современные компьютерные средства позволяют отказаться от многих допущений и упрощений и более точно рассчитывать оптические приборы. Это можно делать не только с помощью специализированных программ для расчета оптических систем (TracePro, OPTIS, LightTools и др.), но и в среде универсальной математической программы Mathcad, а также с помощью сайтов Интернета и специалистов, работающих на профессиональных форумах. А начинать изучение оптики можно и нужно не с заучивания готовых формул, зачастую малопонятных из-за принятых в них допущений и упрощений, о которых умалчивают, а с генерирования на компьютере базовых положений оптики, переходя затем к упрощенным формулам. Что мы и попытались сделать в этой статье.

⁶ Есть полотно, персонажи которых смотрят на вас, где бы вы не находились. Одно из них красочно и «страшно» описано Гоголем в повести «Портрет». Другой пример: два плоских зеркала, расположенные вертикально под прямым углом друг к другу (два зеркала трюмо, например), будут показывать вам ваше изображение при любом вашем расположении относительно такого "вогнутого" зеркала. При этом вы будете видеть себя с разворотом по горизонтали.

Литература

- [1] Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. — СПб. : Лань, 2016 (<https://www.ptcusercommunity.com/groups/etudes>)
- [2] Степин Б. Д. Применение системы единиц физических величин в химии. — М. : Высшая школа, 1990
- [3] Сивухин Д. В. Общий курс физики. — Изд. 3-е, стереотипное. Т. IV. Оптика. — М. : Физматлит, МФТИ, 2002. (https://mipt.ru/dasr/upload/89a/f_3kf3p7-arphh81ii9w.pdf)
- [4] Русинов М. М. Техническая оптика : учеб. пособие для вузов. — Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1979. (http://know.sernam.ru/book_to.php)
- [5] Очков В. Ф., Калова Я., Соколов А. В., Чудова Ю. В. Литературно-физическая композиция «Истории о зеркале и линзе» // *Открытое образование*. 2016. № 1. С. 34–42.
- [6] Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А., Писачич К. Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // *Cloud of Science*. 2015. Т. 2, № 2. С. 177–215.
- [7] Бронштейн И. Гипербола // *Квант*. 1975. № 3.

Авторы:

Валерий Федорович Очков, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Алексей Викторович Соколов, учитель физики ГБОУ Лицей №1502 при МЭИ

Сергей Дмитриевич Федорович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры общей физики и ядерного синтеза; Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Лук Мекес (Luc Meekes), инженер, Компания «Медтроник», Нидерланды

Journey From Home to School Along the Route Pierre Fermat or the Second Optical Property of Hyperbole

V. F. Ochkov^{}, A. V. Sokolov^{**}, S. D. Fedorovich^{*}, Luk Mekes^{***}*

^{}National Research University «Moscow Power Engineering Institute»
111250 Moscow, Russia*

*^{**}Lyceum 1502 at MEI
111555 Moscow, Russia*

*^{***}Фирма «Медтроник»*

Там в Голландии только отделение этой американской компании, Нужен адрес...

e-mail: ochkov@twf.mpei.ac.ru

Abstract. The article considers the the solution of optimization problems as applied problems of reflection and refraction of light ray. Presented numerical and analytical solution of algebraic and differential equations lens and a focusing mirror in Mathcad. It is shown how modern software tools can easily and gracefully solve optical problems. Analytically solved ordinary differential equation of a plano-convex lens. It is emphasized that hyperbolic optical property, is not based on the laws of reflection, and on the law of light refraction. Formula was deduced for material of refractive index of a plano-convex lens with the same optical and geometrical focuses.

Key words: reflection and refraction of light, optical path, Fermat's principle, tautochronism principle, Snellius law, Mathcad package, hyperbole, parabole.

References

- [1] *Ochkov V. F., Bogomolova E. P., Ivanov D. A. (2016) Fiziko-matematicheskie jetjudy s Mathcad i Internet. Saint-Petesburg [In Rus]*
- [2] *Stepin B. D. (1990) Primenenie sistemy edinic fizicheskikh velichin v himii. Moscow, Vysshaja shkola. [In Rus]*
- [3] *Sivuhin D. V. (2002) Obshhij kurs fiziki. IV. Optika. Moscow. [In Rus]*
- [4] *Rusinov M. M. (1979) Tehnicheskaja optika. Leningrad [In Rus]*
- [5] *Ochkov V. F., Kalova Y., Sokolov A. V., Chudova Y. V. (2016) Otkrytoe obrazovanie, 1:34–42. [In Rus]*
- [6] *Ochkov V. F., Bogomolova E. P., Ivanov D. A., Pisachich K. (2015) Cloud of Sci., 2(2)177. [In Rus]*
- [7] *Bronshteyin I. (1975) Kvant, 3. [In Rus]*