В. Ф. Очков, Е. П. Богомолова,

Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва

Рекурсия

Германн сошёл с ума. Он сидит в Обуховской больнице в 17-м нумере, не отвечает ни на какие вопросы и бормочет необыкновенно скоро: «Тройка, семёрка, туз! Тройка, семёрка, дама!..»

А.С. Пушкин «Пиковая дама»

Почти все знают, что такое факториал числа. Это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Для факториала введено обозначение n!. Так, например, 5! = 1·2·3·4·5 = 120. Такое классическое определение факториала не охватывает нуль. Для удобства общей записи формул, в которых 0! обычно входит в виде сомножителя математики договорились считать 0!=1.

Замечательно то, что факториал нуля легко подсчитать (не определить, а, именно подсчитать) с помощью рекурсии (от лат. «recursio» – возвращение). На рисунке 1 помещена программа-функция для Mathcad Prime подсчета факториала с использованием рекурсии.

Рекурсивная функция – это функция, которая при вычислении вызывает сама себя. Она обычно зависит от параметра, при изменении которого происходит рекурсивный спуск или подъем.

Вот как определяет рекурсию один юмористический справочник по информатике: “Рекурсия – см. рекурсия”. Проше всего проиллюстрировать рекурсию геометрически: многократно (даже бесконечное число раз) повторить какие-то геометрические элементы (возможно, с изменением масштаба), т.е. получить самоподобные геометрические объекты. Классическим примером бесконечной рекурсии являются изображения в двух поставленных друг напротив друга зеркалах: в них образуются два коридора из уменьшающихся и затухающих отражений зеркал. При рекурсии очень легко математически посчитать размерность геометрического объекта. Математики заметили, что некоторые рекурсивные объекты имеют дробную размерность. Такие объекты назвали фракталами. Вспомним, что точка имеет размерность 0, линии (кривые и прямые) – 1 («длину»); плоскость и поверхности – 2 («площадь»); трехмерное пространство и тела – 3 («объем»). Чтобы представить себе геометрический объект дробной размерности, достаточно найти в интернете любой сайт с изображениями фракталов. На авторском сайте http://twt.mpei.ac.ru/MCS/Worksheets/Levy-curve.xmcd можно поиграть с так называемой кривой Леви — с фракталом, предложеным французским математиком П. Леви. Этот фрактал получается, если взять половину квадрата вида /\, а затем каждую сторону заменить таким же фрагментом, и, повторяя эту операцию, в пределе получить кривую Леви, у которой дробная размерность.

Если вычислительный алгоритм основан на принципе разбиения основной задачи на подзадачи, каждая из которых повторяет основную, то мы получаем рекурсивный алгоритм. Такой алгоритм решает задачу путем ее сведения к решению одной или нескольких таких же задач, но в более простом варианте[1]. Пример такого алгоритма представлен на рисунке 1. Вычисление факториала начинается со значения *n=5*, а затем идет или рекурсивный подъем (*n>5*), или рекурсивный спуск (*n<5*). Заметим, что можно было бы начать с любого натурального числа *n*, чей факториал нам известен. Например, взять *n=10* и 10!=3628800 или взять *n=1* и *n!=1* и использовать только рекурсивный подъем.

$$
\begin{aligned}
Factorial(n) := \ & \text{if } n = 5 \\
& \quad \text{return } 120 \\
& \text{if } n > 5 \\
& \quad \text{return } (Factorial(n-1) \cdot n) \\
& \text{if } n < 5 \\
& \quad \text{return } \frac{Factorial(n+1)}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$Factorial(4) = 24 \qquad Factorial(6) = 720$$

$$Factorial(5) = 120 \qquad Factorial(0) = 1$$

Рис. 1. Рекурсивная функция “Факториал”

Словесное описание используемой функции Factorial такое. Если n равно 5, то n! равен 120 (см. две первые строки программы на рис. 1). Если n больше 5, то факториал такого целого числа равен (n – 1)! · n. Пример 6! = 5! ·6 = 720. Если n меньше 5, то n! равен (n + 1)!/(n + 1). Примеры: 4! = 5!/5 = 24, 3! = 4!/4 = 6, 2! = 3!/3 = 2, 1! = 2!/2 = 1 и, наконец, 0! = 1!/1 = 1, что и требовалось доказать.

В Интернете есть очень интересный сайт http://oeis.org «Открытая энциклопедия целочисленных последовательностей». Если в окошко этого сайта ввести последовательность чисел 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720 (см. выше) и нажать кнопку Search (Искать), то сайт выдаст ответ, что это факториал, и даст ссылки на интересные материалы об этом математическом операторе.

[1] Как вскипятить воду в чайнике? Нужно налить в него воды и поставить чайник на плиту. А если в чайнике уже есть вода? Нужно ее вылить и… свести задачу к предыдущей ;-)

Очень забавно вводить на этом сайте различные последовательности целых чисел и узнавать, какой закономерности они подчиняются. Так, например, если ввести числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, то будет получен ответ, что это числа Фибоначчи – числовой ряд, где каждое очередное число – это сумма двух предыдущих чисел – см. рис. 2.

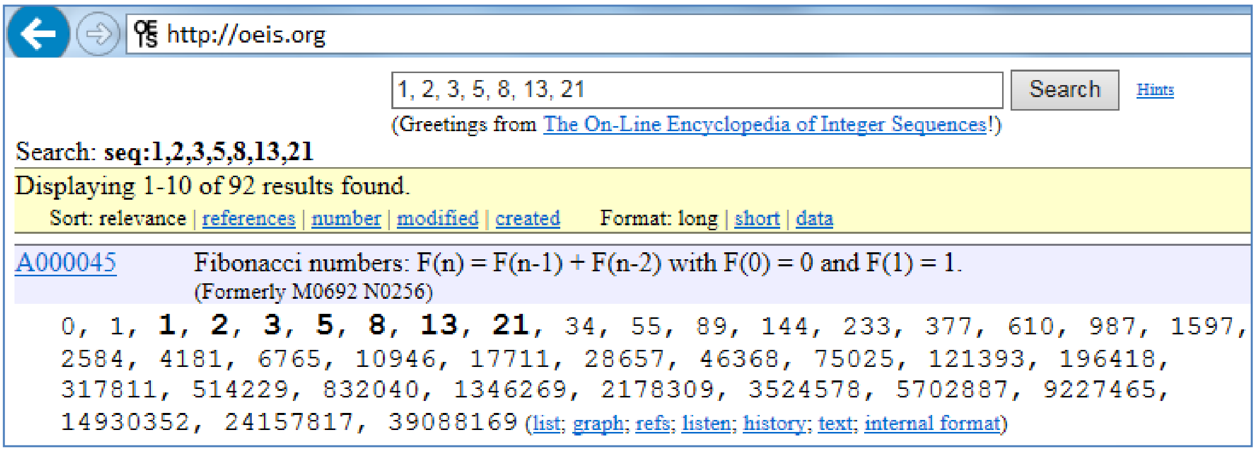

Рис. 2. Сайт определения закономерностей в целочисленных последовательностях

Интересно найти закономерность той или иной числовой последовательности самому или с помощью сайта, показанного на рис. 2. Но еще интересней “утереть нос” этому сайту – ввести числовую последовательность с известной закономерностью и увидеть, что сайт дал слабину и не нашел ответа. После этого можно будет зарегистрироваться на этом сайте и ввести в него новую информацию. Попробуем это сделать. Что такое числа Фибоначчи (см. выше), знают многие. А вот что такое прекрасные числа Фибоначчи, мало кто знает. Это числа – это 1, 3 и 7. Если их сложить, то получится еще одно “симпатичное” число – 11. Вспомним: “Тройка, семерка, туз (11)!” На рисунке 3 показана рекурсивная функция, возвращающая прекрасные числа Фибоначчи не только при положительном, но и при отрицательном аргументе. В этой более полной последовательности чисел появилась и пятерка, которой также нельзя отказать в “изящности”, если вспомнить школьные и институтские оценки знаний.

$$
Fibonacci(n) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } n = 1 \\ \quad \| \text{return } 3 \\ \text{if } n = 2 \\ \quad \| \text{return } 7 \\ \text{if } n = 3 \\ \quad \| \text{return } 11 \\ \text{if } n > 3 \\ \quad \| \text{return } (Fibonacci(n-3) + Fibonacci(n-2) + Fibonacci(n-1)) \\ \text{if } n < 1 \\ \quad \| \text{return } (Fibonacci(n+3) - Fibonacci(n+2) - Fibonacci(n+1)) \end{array} \right.
$$

$$
n := -7..7 \qquad n = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad Fibonacci(n) = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \\ 21 \\ 39 \\ 71 \\ 131 \end{bmatrix}
$$

Рис. 3. Прекрасные числа Фибоначчи

Так вот, если в окошко упомянутого сайта (рис. 2) ввести числа 1, 3, 7, 11, 21, 39, то он “раскусит” эту последовательность, отметив, что каждое очередное число – это сумма трех (а не двух – см. рис. 2), предыдущих. Но если этому сайту оказать “медвежью услугу” – расширить ряд до -1, 3, 1, 3, 7, 11, 21, 39 (приписать в начале последовательности чисел минус 1 и тройку), то ответа не последует – “каша будет испорчена маслом”.

Предлагаем читателям “поиграть” с сайтом oeis.org, вводя в него числовые последовательности, созданные программированием (см. рис. 1 и 3) или с опорой на свою собственную смекалку. Сайт oeis.org, к примеру, знает, что 1, 2, 5, 10, 20, 50 и 100 – это номиналы банкнот США, а 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 – это банкноты евро, и прогнозирует будущие банкноты в случае гиперинфляции. Но этот сайт не знает, что 1, 3, 5, 10, 25, 50, 100 – это номиналы банкнот бывшего СССР[2]. Неизвестно сайту также и то, что 7, 9, 11, 13, 15, 19, 22, 28, 48

[2] Здесь везде по 7 банкнот. Считается, что устойчивая банковская система должна базироваться на «красивом» числе банкнот. В СССР, кстати, до денежной реформы 1961 года и монет было семь – 1, 2, 3, 5, 10, 15 и 20 копеек. Оптимальное число банкнот и монет, а также гирек для весов (разновесов) – это еще одна интересная математическая задача.

– это стоимость (в копейках) мороженного в том же бывшем Советском Союзе. В программе, показанной на рисунке 3, можно поменять опорные числа («тройка, семёрка, туз» на «тройка, семёрка, дама» (еще одна тройка – см. эпиграф), получить новую последовательность целых чисел и пропустить ее через сито сайта oeis.org.

Но вернемся к нашей основной теме – к рекурсии.

Расчет факториала (рис. 1) и чисел Фибоначчи (обычных или прекрасных) можно вести и без рекурсии – с помощью, например, такого алгоритма: знаешь предыдущие числа – высчитываешь очередное, очередное становится одним из предыдущих, а сама операция продолжается до тех пор, пока не доберемся до искомого числа. Такой счет ведется быстрее и не требует значительных ресурсов памяти компьютера. Но рекурсия очень упрощает написание программы. Классический пример – программа, решающая головоломку “Ханойской башни”.

$n := 11 \qquad p := 2^n - 1 = 2047 \qquad V_0 := \text{“begin”} \qquad V_{p+1} := \text{“end”}$

```
HT(n, V, x, y, z) := | p ← 2^n − 1
                     | i ← 1
                     | if n = 1
                     |   | while V_i ≠ 0
                     |   |   | i ← i + 1
                     |   | V_i ← concat(x, z)
                     | else
                     |   | V ← HT(n − 1, V, x, z, y)
                     |   | while V_i ≠ 0
                     |   |   | i ← i + 1
                     |   | V_i ← concat(x, z)
                     |   | V ← HT(n − 1, V, y, x, z)
                     | V
```

$$HT(n, V, \text{“A”}, \text{“B”}, \text{“C”})^{T} = \begin{array}{ccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2048 \\ [& \text{“begin”} & \text{“AC”} & \text{“AB”} & \text{“CB”} & \text{“AC”} & \text{“BA”} & \ldots &] \end{array}$$

Рис. 4. Ханойская башня с рекурсией

Суть головоломки. Имеется три стержня, на первый из которых (у нас в программе на рис. 4 он маркирован как A) нанизаны диски на манер детской пирамидки: самый большой диск внизу – самый маленький наверху. Предлагается переложить эти диски на стержень C, беря их по одному и не кладя большой диск на маленький. Для временного складирования разрешается использовать третий диск B. Программе на рис. 4 достаточно сообщить только число дисков в пирамиде n. После запуска программа будет возвращать порядок перекладки дисков:

n=2: AB, AC и BC (три хода)

n=3: AC, AB, CB, AC, BA, BC и, наконец, AC (семь ходов)

n=4: … (15 ходов) и т.д.

Число перестановок p в общем случае равно 2^n-1. Задача с n дисками легко сводится к задаче с n-1 дисками, а задача с n-1 дисками легко сводится к задаче с n-2 дисками и т.д. до задачи с одним диском, которая решается просто – диск со стержня A перекладываем на диск C (см. на рис. 4 фрагмент программы if n = 1…). Отсюда и рекурсия в программе на рис 4.

По древней легенде тибетские монахи уже несколько тысячелетий перекладывают 64 золотых диска, нанизывая их на алмазные стержни. Когда головоломка будет решена и на стержне C окажутся все диски, наступит конец света. Спасает нас лишь то, что при 64 дисках для решения головоломки потребуются свыше… триллиона лет, если на каждый ход тратить по секунде. Это без учета ложных ходов и времени, необходимого на ручной или компьютерный расчет порядка перестановки дисков. В Интернете, кстати, есть виртуальные игры «Ханойская башня». Откройте ее и поиграйте с 5-10 дисками.