

# Старая задача на новый лад

Была и есть очень интересная книга Сергея Александровича Рачинского ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Рачинский,\\_Сергей\\_Александрович](http://ru.wikipedia.org/wiki/Рачинский,_Сергей_Александрович)) «1001 задача для умственного счета». В печатном виде она издавалась в XIX веке. В наше время она возродилась в виде сайта [www.1001task.ru](http://www.1001task.ru) с удобными средствами поиска и комментирования задач. На этом сайте есть ссылка на очень интересную дискуссию, которая развернулась в журнале «Наука и жизнь» по проблеме устного счета в современном образовательном процессе [1] - <http://www.nkj.ru/archive/articles/6347/>.

Владельцы «яблочных» устройств iPhone и iPad могут бесплатно скачать задачник Рачинского из сетевого магазина AppStore и поместить его в библиотеку iBooks.

На сайте 1001task.ru особо подчеркивается, что все задачи книги нужно решать сугубо в уме без привлечения каких-либо счетных устройств и приспособлений: бумаги и ручки, калькулятора и проч. С бумажным вариантом книги это требование выполнить несложно – ушел с задачкой в глухой лес и решаешь себе в уме на здоровье. Но с электронными версиями книги это требование выполнить весьма сложно. Ведь второе, устаревшее название компьютера – это электронно-вычислительная машина (ЭВМ). Да и само слово компьютер (computer) означает вычислитель... На компьютере (даже если это не традиционный «вычислитель», а смартфон или «таблетка») есть под рукой счетные устройства. Это не только тривиальный калькулятор, приложенный к операционной системе, но и программы, специально предназначенные для решения сложных математических задач: Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad, SMath и др. Вот примеры решения некоторых задач из книги Рачинского, выполненные в среде Mathcad [2] – см. рис. 1-5.

The screenshot shows the Mathcad software interface. At the top, there is a menu bar with 'Математика' (Mathematics) selected. Below it, there are icons for 'x+y' (Mathematics) and '>}' (Block solution). A tooltip for 'Блок текста' (Text block) is visible, explaining that it inserts a text block that stretches across the page width and pushes other blocks down. Below the tooltip, there is a text input field with the text: 'Я за 200 руб. купил собаку, корову и лошадь. Корова втрое дороже собаки, лошадь вчетверо дороже собаки вместе с коровой. Цены?'. Below the text, there is a mathematical expression: 
$$\left[ \begin{array}{l} 200 \text{ руб} = \text{собака} + \text{корова} + \text{лошадь} \\ \text{корова} = 3 \text{ собака} \\ \text{лошадь} = 4 \cdot (\text{собака} + \text{корова}) \end{array} \right] \xrightarrow{\text{solve, } \left[ \begin{array}{l} \text{собака} \\ \text{корова} \\ \text{лошадь} \end{array} \right]} [10 \text{ руб} \quad 30 \text{ руб} \quad 160 \text{ руб}]$$

Рис. 1.

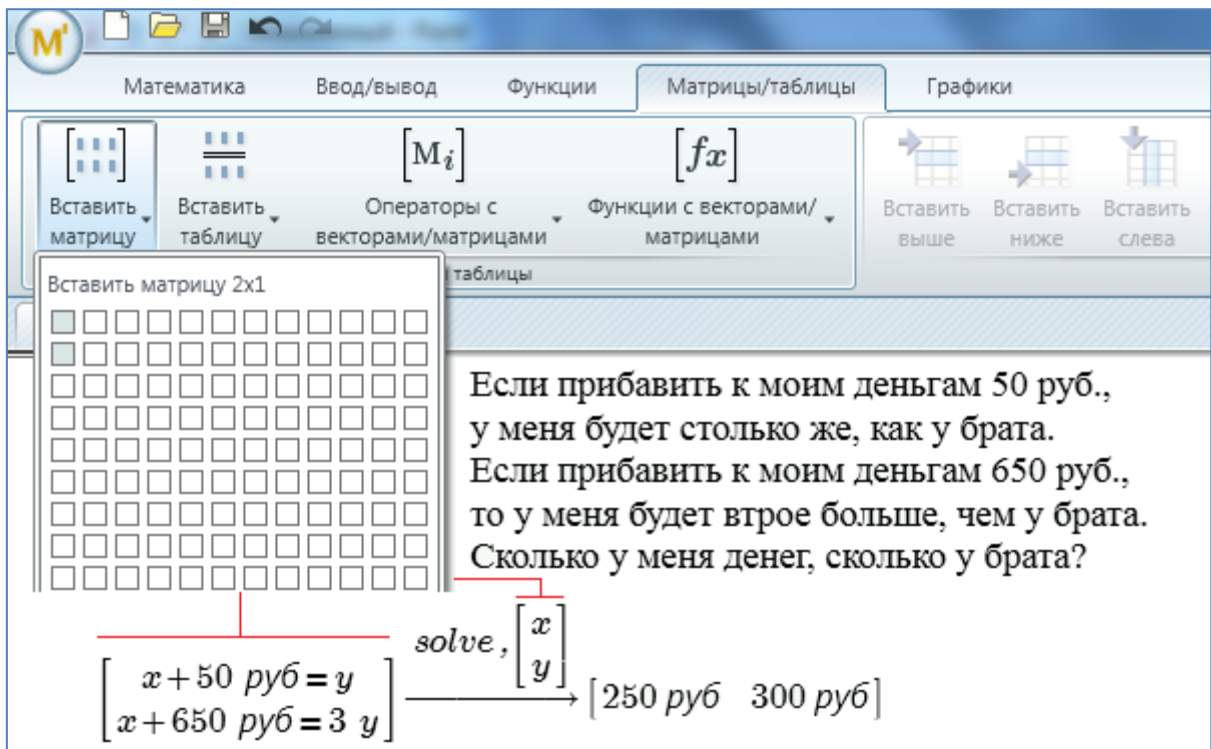


Рис. 2.

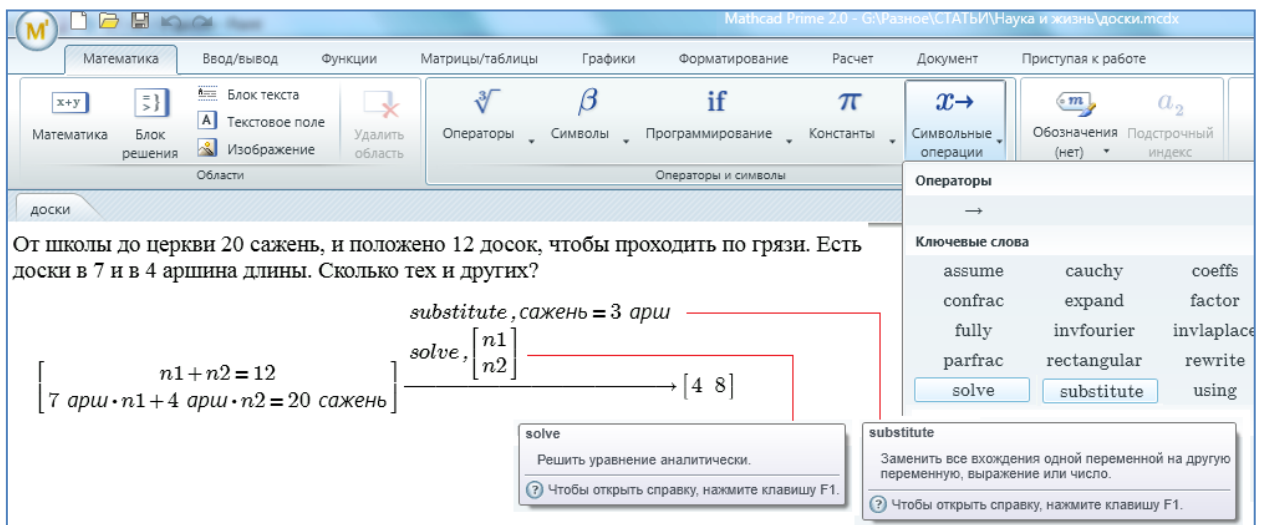


Рис. 3.

1000 вершков — сколько сажень, аршин и вершков?

$$\frac{1000 \text{ вершок}}{\text{сажень}} \xrightarrow{\substack{\text{substitute, сажень} = 3 \text{ арш} \\ \text{substitute, арш} = 16 \text{ вершок}}} \frac{125}{6} = 20.833$$

$$\frac{1000 \text{ вершок} - 20 \text{ сажень}}{\text{арш}} \xrightarrow{\substack{\text{substitute, сажень} = 3 \text{ арш} \\ \text{substitute, арш} = 16 \text{ вершок}}} \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\frac{1000 \text{ вершок} - 20 \text{ сажень} - 2 \text{ арш}}{\text{вершок}} \xrightarrow{\substack{\text{substitute, сажень} = 3 \text{ арш} \\ \text{substitute, арш} = 16 \text{ вершок}}} 8$$

Ответ 1000 вершков = 20 сажень 2 аршина 8 вершков

Рис. 4.

У медника было 8 кусков меди, весом каждый в 1 фунт 8 лотов. Из этой меди он сделал чайники, весом каждый 1 фунт 21 лот 1 золотник. Сколько чайников?

$$8 \cdot (\text{фунт} + 8 \text{ лот}) = n \cdot (\text{фунт} + 21 \text{ лот} + \text{золотник}) \xrightarrow{\substack{\text{substitute, фунт} = 32 \text{ лот} \\ \text{substitute, лот} = 3 \text{ золотник} \\ \text{solve, } n}} 6$$

Рис. 5.

Грешно, конечно, смотреть свысока на автора задачника и его читателей. Вы, мол, ломали и ломаете головы, придумывая задачи<sup>1</sup> и решая их в уме, а мы разделяемся с ними в два счета – раз-два и ответ готов...

Что можно сказать по этому поводу!? Зачем мы в наш компьютерный век снова и снова обращаемся к старым задачам!?

Во-первых, устный счет – это прекрасная гимнастика для ума<sup>2</sup>. И использование тут компьютера или калькулятора равносильно дооборудованию спортивного тренажера (современный гимнастический снаряд для тела<sup>3</sup>)... гидроусилителями.

Во-вторых,... см. название статьи.

Решение задач Рачинского, в основном, сводится к поиску корней алгебраических уравнений и их систем. В среде Mathcad для решения таких задач предусмотрен оператор **solve**. В некоторых задачах его нужно дополнить оператором **substitute**, заменяющим одну переменную на другую

<sup>1</sup> Интересно, составлял ли Рачинский свой задачник «сугубо в уме» или он все-таки пользовался ручкой, бумагой или счетами – компьютером 19-го века.

<sup>2</sup> В наше время *программирование* лучшая гимнастика для ума. Но далеко не всем доступны эти «умственные физические упражнения». Некоторые форумы (форум упоминавшихся математических пакетов <http://forum.exponenta.ru>, например) при входе требует сложить четыре числа. Многие, сидящие, за компьютером не могут это сделать в уме и прибегают к помощи калькулятора.

<sup>3</sup> Автор в Интернете наткнулся на такую фотографию. Пустая лестница. Справа и слева от нее эскалаторы, поднимающие и опускающие довольно тучных людей. Вверху, в конце лестницы здание с вывеской «Fitness lub» – см. <http://www.goodexperience.com/broken/i/04/02/america-fitness-s.jpg>

или на выражение<sup>4</sup>. С помощью этого оператора мы подсказали компьютеру, что в сажени три аршина (рис. 3), в фунте 32 лота, а в лоте 3 золотника (рис. 3<sup>5</sup>), т.е. мы научили компьютер обращаться со старыми русскими мерами веса и длины, какие были в ходу в момент написания задачника. Задача на рис. 4 непосредственно учит нас работать со старыми недесятичными единицами длины<sup>6</sup>. Такая задача, кстати говоря, актуальна и в наши дни. Кто может сходу подсчитать в уме, сколько лет, месяцев, недель, дней, часов, минут и секунд в миллиарде секунд<sup>7</sup>? На рис. 6 показано решение этой задачи в среде Mathcad<sup>8</sup>.

$год := 365 \text{ day}$      $месяц := 30 \text{ day}$      $неделя := 7 \text{ day}$   
 $t := 10^9 \text{ s}$     секунды  
 $t = 31.71 \text{ год}$     31 год (по 365 дней)  
 $t - 31 \text{ год} = 8.636 \text{ месяц}$     8 месяцев (по 30 дней)  
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} = 2.725 \text{ неделя}$     2 недели  
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} = 5.074 \text{ day}$     5 дней  
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} - 5 \text{ day} = 1.778 \text{ hr}$     1 час  
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} - 5 \text{ day} - 1 \text{ hr} = 46.667 \text{ min}$     46 минут  
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} - 5 \text{ day} - 1 \text{ hr} - 46 \text{ min} = 40 \text{ sec}$   
 Проверка  
 $31 \text{ год} + 8 \cdot \text{месяц} + 2 \cdot \text{неделя} + 5 \text{ day} + 1 \text{ hr} + 46 \text{ min} + 40 \text{ sec} = 1000000000 \text{ s}$   
 Встроенная в Mathcad недесятичная единица времени - часы:минуты:секунды  
 $t = "277777:46:40" \text{ hhmmss}$

Рис. 6.

Так какой же «новый лад» можно «приладить» к старым арифметическим задачам!?

1. Тексты задач из книги Рачинского заканчиваются численными ответами с единицами измерений или без оных<sup>9</sup>. Наши компьютерные решения задач (см. рис. 1-5) можно рассматривать как... ответы на задачи. Более того, в таких ответах записано и современное компьютерное решение задач. Задачник с такими ответами превращается в решебник, задачник с подробным описанием решений.
2. Авторы современных задачников по математике, предназначенных для устного счета и/или для решения с привлечением бумаги с ручкой и калькулятора могут

<sup>4</sup> На рис. 1-3 дополнительно показаны инструменты решения задач и оформления решения: операторы символьной математики Mathcad (рис. 3), команда меню вставки комментария (рис. 1) и команда меню вставки вектора с двумя элементами (матрица 2 на 1), куда записывается система уравнений и неизвестные уравнения (рис. 2).

<sup>5</sup> Современные единицы измерения встроены в Mathcad, но старых русских единиц в нем нет.

<sup>6</sup> Переход от недесятичной системы исчислений (в версте 500 сажений, в сажени 3 аршина, в аршине, 16 вершков) к десятичной (в километре 1000 метров, в метре 100 см, в сантиметре 10 миллиметров и т.д. до набившим всем оскомину нанометров) – это первый удар по устному счету. Калькулятор с компьютером только добивают его...

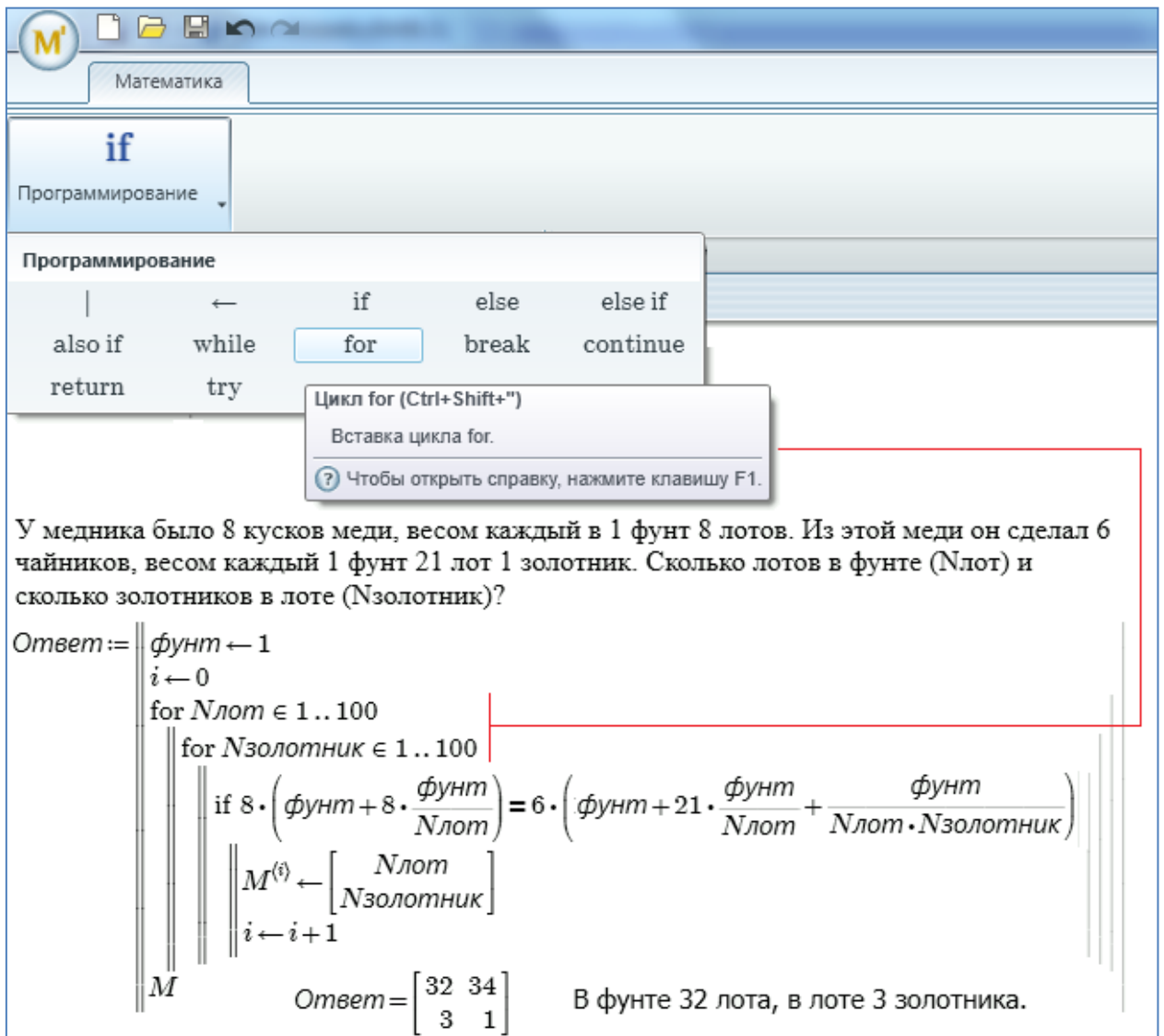
<sup>7</sup> «Десятичность» не до конца охватила систему измерений. Кроме времени, тут можно упомянуть и угловые единицы с градусами, минутами и секундами...

<sup>8</sup> Сравнивая рисунок 4 с рисунком 6, где решаются одинаковые по сути задачи, можно отметить, что в первом случае задействована *символьная математика* пакета Mathcad, а во втором – *численная*.

<sup>9</sup> В современных задачниках ответы, как правило, помещают в конце книги.

использовать не только «бумагу с ручкой и калькулятор», но и вышеупомянутые математические программы для составления задач и, главное, для проверки правильности и единственности решения – см. сноску 1. Учитель тут должен идти впереди учеников. У нас же часто получается так, что школьники прекрасно знают компьютер, а учитель даже боится подойти к нему. При этом данная «компьютеробоязнь» маскируется заявлениями, что «компьютер в процессе обучения приносит только вред» – мешает, например, освоению приемов устного счета.

3. Задачи Рачинского и другие подобные можно модернизировать так, чтобы их без компьютера решить было бы довольно сложно. Пример на рис. 7.



У медника было 8 кусков меди, весом каждый в 1 фунт 8 лотов. Из этой меди он сделал 6 чайников, весом каждый 1 фунт 21 лот 1 золотник. Сколько лотов в фунте ( $N_{лот}$ ) и сколько золотников в лоте ( $N_{золотник}$ )?

Ответ :=

```

фунт ← 1
i ← 0
for Nлот ∈ 1..100
  for Nзолотник ∈ 1..100
    if  $8 \cdot \left( \text{фунт} + 8 \cdot \frac{\text{фунт}}{N_{лот}} \right) = 6 \cdot \left( \text{фунт} + 21 \cdot \frac{\text{фунт}}{N_{лот}} + \frac{\text{фунт}}{N_{лот} \cdot N_{золотник}} \right)$ 
      M(i) ← [ Nлот, Nзолотник ]
      i ← i + 1
M

```

$\text{Ответ} = \begin{bmatrix} 32 & 34 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 
 В фунте 32 лота, в лоте 3 золотника.

Рис. 7.

Гимназист и неграмотный русский крестьянин 19-го века прекрасно знали, сколько фунтов в пуде, вершков в аршине и аршин в сажени. Современный школьник за такой информацией полезет в справочник или Интернет. А если нет справочника под рукой, а Сеть временно недоступна<sup>10</sup>? Не беда! В задачу о меднике (рис. 5) с ответом (6 чайников) «вшито» соотношение фунта, лота и

<sup>10</sup> Многие не могут нормально работать на компьютере с отключенным Интернетом, даже если Интернет в данный момент не нужен, более того, вреден – отвлекает от выполнения срочной работы. Возникает чувство, что тебя заперли в комнате...

золотника. Решая новую задачу (рис. 7), школьнику придется изощряться не в устном счете, а в умении составлять программу для компьютера. На рис. 7 показано одно из возможных решений задачи, основанное на переборе всех возможных вариантов: в фунте может быть от 1 до 100 лотов, а в лоте - 1 до 100 золотников<sup>11</sup>. Кстати говоря, почти все задачи Рачинского подобраны так, что у них целочисленные ответы. При решении таких задач можно успешно использовать метод перебора, расцветший в эпоху компьютеров с их невероятным быстродействием [4]. Чему равен кубический корень из 1728!? Перебрал числа в разумном интервале (от 1 до 100, например) и запомнил то, куб которого равен 1728! В уме этого, конечно, делать не будешь, а на компьютере – пожалуйста<sup>12</sup>. Пусть читатель попробует перебором вариантов решить задачу на рис. 1 без указания того, что от школы до церкви проложено именно 12 досок: «От школы до церкви 20 сажень, и положены доски, чтобы проходить по грязи<sup>13</sup>. Есть доски в 7 и в 4 аршина длины. Сколько тех и других? [Ответ: 4 и 8 или 8 и 1]» - см. рис. 1а. А если короткая доска будет длиной в один аршин, то вариантов укладки досок будет уже восемь! Хотя правильный ответ будет 8 и одна доска – укладывают сначала длинные доски, а потом, когда очередная длинная не умещается, кладем на дороге короткие (короткую)... Тут уже к математике примешиваются другие научные дисциплины – экономика, например. Удельная цена длинной доски (руб/м) обычно меньше короткой: второй вариант ответа в задаче о досках (8 досок по 7 аршин и одна доска в один аршин) будет дешевле и из-за того, что девять досок укладывать проще, чем двенадцать...

---

<sup>11</sup> Да, именно так. Перебор нужно начинать не с двух, а с единицы. Ведь, в задаче может быть подвох – используются одинаковые единицы измерения с разным названием: «Я заплатил за товар стольник. Сколько я заплатил рублей и целковых?»

<sup>12</sup> Кубический корень из 1728 – это не одно число, а три: двенадцать и еще два комплексных числа. В этом можно убедиться, если решить в Mathcad уравнение  $x^3=1728$ . Перебором тут можно получить только один ответ. Такой же неполный ответ дают и калькуляторы с компьютерами – см. рис. 1b.

<sup>13</sup> Эта российская проблема не решена до сих пор. Вспомним о двух наших бедах – «о дураках и дорогах»!

Операторы

Векторы и матрицы

|           |         |        |           |           |
|-----------|---------|--------|-----------|-----------|
| $\times$  | $\ x\ $ | $[ ]$  | $M^{(i)}$ | $M,$      |
| $M^{(i)}$ | $M^T$   | $1..n$ | $1,3..n$  | $\vec{v}$ |

Область дискретных значений (..)  
 Для x, z определяет последовательность чисел с шагом 1, начиная с x и заканчивая z.  
 ? Чтобы открыть справку, нажмите клавишу F1.

От школы до церкви 20 сажень, и положены доски, чтобы проходить по грязи. Есть доски в 7 и в 4 аршина длины. Сколько тех и других?

Ответ :=  $\left\| \begin{array}{l} [арш \leftarrow 1 \text{ сажень} \leftarrow 3 \text{ арш } i \leftarrow 0] \\ \text{for доска7} \in 1..100 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for доска4} \in 1..100 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{if } 20 \text{ сажень} = \text{доска7} \cdot 7 \text{ арш} + \text{доска4} \cdot 4 \text{ арш} \\ \left\| \left[ M^{(i)} \leftarrow \begin{bmatrix} \text{доска7} \\ \text{доска4} \end{bmatrix} \quad i \leftarrow i + 1 \right] \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$

$M$

Ответ =  $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

Рис. 1а.

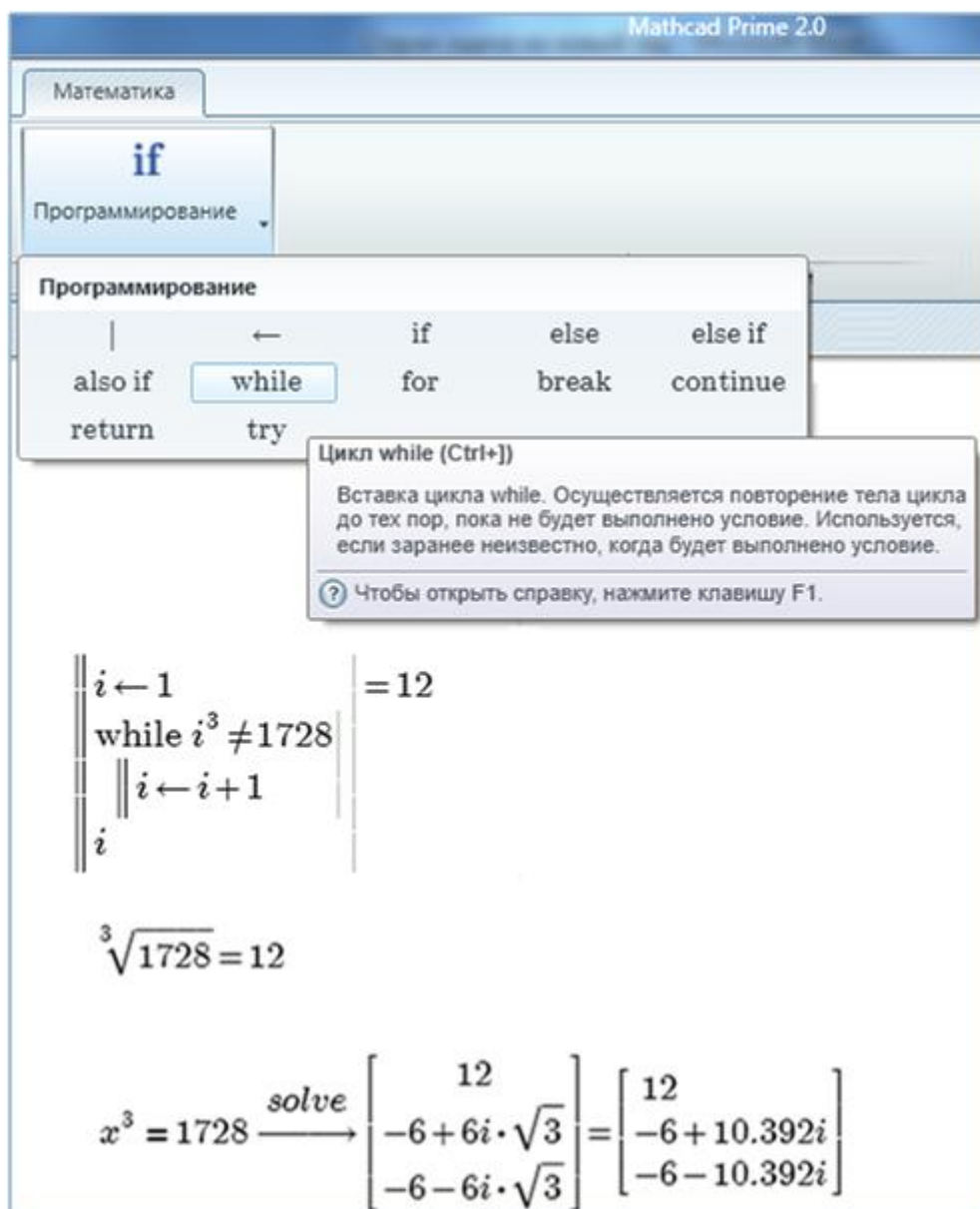


Рис. 1b.

Задачник Рачинского интересен и в том плане, что по нему можно узнать, как жили люди в позапрошлом веке, чем они занимались, чем торговали и какие были цены... В художественной литературе (а задачник Рачинского, помимо прочего, отличается и хорошим литературным стилем) часто можно встретить математические выкладки, касающиеся, в основном финансовых проблем [3] и не только. Этой теме будет посвящена следующая статья - <http://twm.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/SystemEquations.pdf>.

Литература:

1. В.Доценко В. Пятое правило арифметики // Наука и жизнь, № 12, 2004 г. <http://www.nkj.ru/archive/articles/457/>
2. Очков В. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов // БХВ-Петербург, 2007 г. [http://twm.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad\\_14/RusIndex.html](http://twm.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad_14/RusIndex.html)
3. Карпушина Н. Проценты простые и сложные. Уроки арифметики в классической литературе // Наука и жизнь, № 9, 2009 г. <http://www.nkj.ru/archive/articles/16385/>



4. Очков В.Ф., Дробилко В.С. На компьютер надейся, а сам не плошай! // Информатика в школе, №3(76) 2012 г. <http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/USA.pdf>