Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

В. Ф. Очков, Н. А. Очкова

ЛЕВ ТОЛСТОЙ И МАТЕМАТИКА

3-е издание

МПГУ
Москва • 2023

УДК 821.161.1Толстой Л.:51 DOI: 10.31862/9785426311770
ББК 83.3(2=411.2)52-8Толстой Л.Н.:22.1
О-957

Рецензенты:
Александр Михайлович Лукацкий, доктор физико-математических наук, институт энергетических исследований РАН
Янина Викторовна Солдаткина, доктор филологических наук, профессор Московского педагогического государственного университета

Обложка **Александра Бляхера**

Очков, Валерий Федорович.
О-957 Лев Толстой и математика / В. Ф. Очков, Н. А. Очкова. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : МПГУ, 2023. – 208 с. : ил.
ISBN 978-5-4263-1177-0

В книге сделана попытка анализа жизни и творчества Льва Николаевича Толстого в плане его взаимоотношений с математикой, с физико-математическими науками. Попутно в этом аспекте затронуты и другие русские и зарубежные классики литературы. Обсуждается STEM-технология образования по математике и литературе с использованием современных информационных технологий. Предлагается присвоить имя Льва Толстого одной замкнутой кривой (эллипс Толстого), ввести понятие «золотая литературно-математическая пропорция Толстого» и новый узнаваемый символ «око Толстого».

УДК 821.161.1Толстой Л.:51
ББК 83.3(2=411.2)52-8Толстой Л.Н.:22.1

ISBN 978-5-4263-1177-0
DOI: 10.31862/9785426311770

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПИСАТЕЛИ, ПОЭТЫ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, УПОМЯНУТЫЕ В КНИГЕ

Агата Кристи; Александр Дюма-отец; Артур Конан Дойль; Иоганн Вольфганг фон Гёте; Г.Р. Державин «Бог»; братья Стругацкие «Понедельник начинается в субботу»; Андрей Вознесенский «Параболическая баллада»; Давид Самойлов; М. Горький; В.В. Набоков; Джон Лили; Уильям Шекспир; Джордж Гордон Байрон; Хорхе Луис Борхес; А.Н. Радищев; Джон Тиндаль «Популярные лекции Джона Тиндаля. Тепло и холод. Материя и сила»; Джон Голсуорси «Сага о Форсайтах»; Оскар Уайльд «Портрет Дориана Грея»; Гюстав Флобер «Мадам Бовари»; Жюль Верн «Двадцать тысяч лье под водой»; М.А. Булгаков «Мастер и Маргарита», «Белая гвардия»; И.А. Гончаров «Обрыв»; Ф.М. Достоевский «Игрок», «Идиот», «Братья Карамазовы», «Зимние заметки о летних впечатлениях»; Л.Н. Толстой «Детство. Отрочество. Юность», «Холстомер», «Отец Сергий», «Война и мир», «Анна Каренина», «Воскресение», «Крейцерова соната», «Смерть Ивана Ильича», «Исповедь», «Евангелия от Толстого», «Дьявол», «Плоды просвещения», «Живой труп»; А.П. Чехов «Мальчики», «Учитель словесности», «В пансионе», «Сирена», «Толстый и тонкий», «Драма»; Н.С. Лесков «Жемчужное ожерелье», «Левша»; Шарль Перро «Мальчик-с-пальчик»; А.Н. Толстой «Гиперболоид инженера Гарина», «Приключения Буратино»; А.К. Толстой «Упырь»; Н.В. Гоголь «Тарас Бульба», «Мертвые души», «Портрет», «Женитьба»; А.С. Пушкин «Пиковая дама», «Каменный гость», «Евгений Онегин»; Даниил Хармс «Исторический эпизод»; М.М. Зощенко «Мемуары старого капельдинера», «Трагикомический рассказ про человека, выигравшего деньги»; Е.И. Замятин «Мы»; И.С. Тургенев «Муму», «Дворянское гнездо», «Записки охотника»; А.И. Солженицын; Самуил Маршак; Дмитрий Быков «Орфография»; Эдгар По «Золотой жук», «Овальный портрет»; Марк Твен «Банковский билет в миллион фунтов стерлингов»; Юлиан Тувим; Рэй Брэдбери «451° по Фаренгейту»; Венедикт Ерофеев «Москва–Петушки»; Н.Г. Чернышевский «Что делать?»; Н.А. Некрасов; Яков Перельман «Живая математика»; М.Е. Салтыков-Щедрин; Д.В. Григорович; А.Н. Островский; Я.П. Полонский; Льюис Кэрролл; Эдуардо де Филиппо, В.В. Маяковский, Ф.И. Тютчев, Александр Блок, братья Стругацкие, Иван Бунин, Павел Коган.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ, УПОМЯНУТЫЕ В КНИГЕ

Длина эллипса, сочетание, сочетание с повторением, биномиальные и триномиальные коэффициенты, тругольник и тетраэдр Паскаля, большая теорема Ферма, совершенные числа, наименьшее общее кратное, случайные и псевдослучайные числа, трехсторонняя дуэль, полет трех небесных тел, полет артиллерийского снаряда, полет кометы, модель «хищник – жертва», задача коммивояжера, семь мостов Кенигсберга, задача о погоне, полет летучих мышей, маятник, гравитационный поезд, решение систем линейных алгебраических уравнений, решение систем нелинейных алгебраических уравнений, решение интегрального уравнения, решение систем дифференциальных уравнений, теория игр, дифференцирование, интегрирование, регрессионный анализ, метод наименьших квадратов, медиан-медианная регрессия, плоские кривые второго и четвертого порядка, овал Толстого.

Вышеприведенные списки позволяют рассматривать эту книгу как учебное пособие по математике для филологов и как учебное пособие по литературоведению для математиков.

ВВЕДЕНИЕ

Мы сразу просим читателя под словом «автор» подразумевать обоих авторов, разделяя их, где это требуется, на первого (больше математик) и второго (больше филолог).

А повод для написания книги таков.

Автор проводит со своими студентами в Московском энергетическом институте занятия по инновационной технологии, которую на англоязычном Западе обозначают аббревиатурами STEM, STEAM или даже STREAM [13, 28, 31–33]. Выпускаются журналы *International Journal of STEM Education* (https://stemeducationjournal.springeropen.com), *European Journal of STEM Education* (https://www.lectitopublishing.nl/european-journal-of-stem-education) и другие подобные региональные периодические издания. Мы же в России традиционно характеризуем такой учебный процесс словами «междисциплинарные связи», «когнитивное образование» и др. STEM, STEAM и STREAM – это аббревиатуры цепочки слов Science (Наука), Technology (Технология), Engineering (Инженерное дело), Art (Искусство), Religion (Религия) и Mathematic (Математика) плюс, конечно, компьютерные информационные технологии, без которых немыслимо не только современное образование, но и современная жизнь в целом. Есть еще и аббревиатура HASS (Humanities, Arts and Social Sciences), выделяющая подобное инновационное направление в современном гуманитарном образовательном процессе. Автор предлагает использовать здесь более короткую, но всеобъемлющую аббревиатуру SAR, традиционная расшифровка которой – удельный коэффициент поглощения (Specific Absorption Rate). Имеется в виду поглощение электромагнитной энергии компьютера, планшета, смартфона на единицу массы пользователя. А можно излучать (преподавать) и поглощать («на единицу массы» школьника или студента) знания в процессе изучения науки (S), искусства (A) и религии (R). Человеческая цивилизация покоится на этих «трех китах». Кто-то больше опирается на науку в «научном» и житейском смыслах этого слова – «Вот тебе наука на будущее!», кто-то на искусство – «Красота спасет мир!», а кто-то на религию – «Все мы ходим под Богом!». Лев Толстой, кстати, к концу своей жизни сделал резкий крен от искусства (от литературы) к религии и начал создавать свое собственное вероисповедание – толстовство – гибрид протестантства с буддизмом.

Слово a stem переводится с английского как стебель, ствол (stem cells – стволовые клетки). В этом контексте технологию образования STEM можно считать неким стволом (каркасом), от которого отходят ветви отдельных учебных дисциплин: математики, физики, химии, биологии… И литературоведения, конечно.

В немецком языке в ходу другая аббревиатура, более точно характеризующая данную технологию обучения, – MINT: Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft (Естествознание) и Technik. Здесь, как тому и положено, на первом месте стоит царица наук математика. Немецкий термин подчеркивает то, что математика – это не просто наука, а больше чем наука. И это правильно: можно изучить оптику, не зная термодинамики, и наоборот. Но ни оптику, ни термодинамику нельзя изучить, не зная математики. Даже историю, политологию и, по выражению Чехова, «прочую юриспруденцию» нельзя толком изучить, не зная хотя бы азов математики.

Слово mint по-английски – это мята. Упоминаемая нами технология образования призвана освежить застоявшийся воздух в наших учебных заведениях. Некую новую необычную «мятную свежесть» автор захотел внести и в исследования творчества Толстого – в толстоиаду.

Есть такая детская и взрослая забава «Собери мозаику». Так вот, отдельные элементы мозаики могут быть сами по себе очень красивыми и занимательными, но увидеть в них будущую картинку довольно трудно. Это могут сделать только люди с богатым воображением и/или знающие заранее, что из элементов мозаики должно собраться. Уроки по технологии STEM – это собирание мозаики, реальной картины мира из отдельных элементов: математика, физика, химия, литература, изобразительное искусство и т.д.

Русская аббревиатура СТЭМ для многих уже пожилых бывших студентов расшифровывается так: студенческий театр эстрадных миниатюр. Это творческое движение на грани разрешенного и запрещенного породило еще одну узнаваемую аббревиатуру – КВН – Клуб веселых и находчивых. Все это было широко распространено в технических вузах в последней трети прошлого века. СТЭМ и КВН были отдушинами в студенческой среде тех довольно сложных времен (оттепель, застой, перестройка и проч.) и имели прямое отношение к одной из попутных тем книги – к гуманитаризации научно-технического и инженерного образования, к образованию «с человеческим лицом». Кстати, из СТЭМ вышли такие великие и выдающиеся русские актеры, как Александр Филиппенко (физик), Ия Саввина (журналист – Долли в самой знаменитой советской экранизации «Анны Карениной»), Алла Демидова (экономист), Семен Фарада (механик) и многие другие. Власти относились к СТЭМ и КВН по принципу «Мы – за смех! Но нам нужны подобрее Щедрины и такие Гоголи, чтобы нас не трогали». Актуальное окончание цитаты: «…и такие блогеры, чтобы нас не трогали».

Аббревиатура КВН – это аллюзия на популярный послевоенный телевизор КВН-49. А экраны кинематографа, затем телевизора и наконец компьютера (планшета, смартфона) – это те главные окна, через которые мы сейчас приобщаемся к науке, искусству и даже к религии.

Аббревиатуру SAR можно русифицировать так: НИР, наполнив это известное вузовское сокращение (научно-исследовательская работа) новым содержанием: исследование науки, искусства и религии на занятиях по новой образовательной технологии НИР с использованием современных информационных технологий!

Если мы коснулись триад (SAR, НИР, КВН), то следует отметить, что цель учебы – это получение не только *знаний* и *навыков*, но и *удовольствия*. Без удовольствия даже самая престижная и высокооплачиваемая работа может превратиться в каторгу. А учеба – это очень тяжелый и упорный труд. Элементы STEM в обучении делают этот процесс помимо прочего и более занимательным не только для школьников и студентов, но и для самих преподавателей. Итак, Знания, Навыки, Удовольствие! Толстого, кстати, очень злила триада «Самодержавие, Православие, Народность», которой в царской России пытались подменить лозунг Великой французской революции «Свобода, Равенство, Братство – Liberté, Égalité, Fraternité». Мы сейчас знаем, чем это кончилось. Толстой, слава богу, не дожил до этих страшных времен: Первая мировая война, три революции, гражданская война… Хотя прелюдию этих событий – Русско-японскую войну – Толстой застал.

Образование по технологии STEM будет развиваться по мере роста числа преподавателей, овладевших соответствующими знаниями и навыками, освоивших компьютерные физико-математические пакеты, средства искусственного интеллекта, а не только офисные приложения, интернет и азы традиционного алгоритмического программирования (язык Pascal или Python, например).

Так вот, на одном из занятий по учебной дисциплине «Инженерные расчеты», проводимой в МЭИ по технологии STEM, пересеклись математика и… художественная литература – решалась геометрическая задача, навеянная одним ключевым моментом романа Л.Н. Толстого «Анна Каренина» – скачки на Красносельском ипподроме. Этого ипподрома давно уже нет, но осталась память о нем – железнодорожная станция под названием Скачки. А это одно из хобби автора данной книги – нахождение и решение интересных математических задач в художественной литературе [6, 27]. Автор в этом отношении считает себя неким математическим маньяком, видящим математику в вещах, довольно слабо связанных с математикой, что, безусловно, можно заметить и в этой книге. Возник интерес и к другим физико-математическим аспектам жизни и творчества этого великого русского писателя и мыслителя. Все это вылилось в книгу, которая предлагается вниманию читателя. Вниманию любезного и снисходительного читателя, как писали во времена Льва Николаевича. Читателя, интересующегося математикой и литературой – «физикой и лирикой».

Два важных дополнительных вводных замечания.

Александру Дюма-отцу приписывают фразу *«История – это гвоздь, на который я вешаю свою картину!»*. Так вот, отрывки

из произведений, а также факты биографии Л.Н. Толстого и других писателей, попутно упомянутых в книге, – это тоже некие «вбитые гвозди», на которые автор вешает свои «картины» – описания и решения интересных, на взгляд автора, математических задач.

Одно из рабочих названий этой книги было таким: «Код Льва Толстого». В произведениях Льва Николаевича, в фактах его биографии автор увидел некие закодированные математические смыслы, которые захотелось раскрыть. Насколько автору это удалось – судить читателю.

И последнее. Книги обычно кем-то рецензируются – см. стр. 2 этой книги. Это может выполнить либо профессиональный литературный критик, либо сам читатель, делая выводы по книге. А вот бы послать эту книгу на рецензию самому Льву Николаевичу! Что бы он сказал?! Вполне вероятно, что в какой-то момент «костыль затрясся бы в его судорожно сжатой руке».

Печатные экземпляры первого издания книги автор дарил своим друзьям и знакомым – математикам и филологам. Некоторые их замечания и пожелания учтены во втором и в данном третьем издании. Математики при этом обычно говорили, что они давно не брали в руки томики с произведениями Толстого, но обязательно это сделают в ближайшее время. Друзья же филологи сразу объявляли, что они полные профаны в математике и это уже никак не исправишь. Короче, математики стеснялись того, что они не спецы в филологии. Филологи же чуть ли не гордились тем, что они полные профаны в математике. И это отчасти понятно: математика – это наука, а филология – скорее искусство.

Одна из задач этой книги – показать филологам, что математика Льва Толстого не такая уж сложная для понимания и что компьютер может помочь не только набирать и править тексты, но и изучать математику.

Интернет (см. раздел 17) постепенно исключает из нашей жизни ситуацию, когда приходишь в библиотеку, а вам говорят, что нужная книга «на руках». В советском фильме «Большая семья» (1954) после такой сцены возникает целый любовный треугольник, некий «полет трех небесных тел» (см. раздел 8) в духе

Льва Толстого с элементами подлости и благородства. Сейчас библиотекарь в такой ситуации может порекомендовать вам сесть за компьютер (или вытащить из кармана смартфон) – в самой библиотеке, дома или на работе – и открыть на нем нужную книгу – ее электронную версию. Но ежели читателю необходим именно печатный вариант книги (а электронная копия никогда не заменит «живой» книги с ее особым запахом и с особыми тактильными ощущениями переворачиваемых страниц), то библиотекарь попросит вас оставить электронный адрес, по которому он сообщит, что книга вернулась домой в библиотеку.

Адрес электронной версии первого издания данной книги (а она вышла и в печатном виде довольно ограниченным тиражом) таков: www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tolstoy-Math.pdf. Второе сугубо электронное издание расположено по адресу www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tolstoy-Math-2.pdf. Последующие издания будут иметь приписку 3, 4, 5 и т.д. Вышли ли они, узнать просто. Как говорят математики, необходимо и достаточно ввести в браузере интернета соответствующий запрос. Кстати, о запросах – об интернет-адресах ссылок, которых довольно много в книге. Рекомендуется не просто щелкать по ним мышкой, а копировать адрес и переносить его в адресную строку браузера.

Литературные источники книги также дополнены ссылками на их электронные версии, что поможет читателю при необходимости глубже раскрыть те или иные математические понятия, затронутые в книге.

Ну и традиционное последнее. Автор будет безмерно благодарен читателям за отзывы и замечания по книге, которые просит направлять по адресу OchkovVF@mpei.ru. Особо будут ценимы описания новых сюжетных линий по связи Льва Толстого с математикой. Интересна также окажется информация о связи с математикой и других писателей – «великих и разных».

1. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ ЭЛЛИПС И КОМБИНАТОРИКА

Упомянутый во введении ключевой момент романа «Анна Каренина» [23] – это скачки на Красносельском ипподроме (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Кадр из фильма «Анна Каренина» [1]

Читаем в романе: *«Скачки должны были происходить на большом четырехверстном эллиптической формы кругу…»*

Но, скорее всего, этот «гипподром» (так у Толстого) имел форму не эллипса (частный случай овала[1]), а традиционную форму беговых дорожек на стадионах и ипподромах – два отрезка параллельных прямых (на одном из них стартуют и финишируют), соединенных воедино полуокружностями или другими кривыми линиями, о которых мы расскажем в свое время. На Западе такая замкнутая кривая называется Stadium (см. https://en.wikipedia.org/wiki/Stadium_(geometry)). Так, например, устроен Московский ипподром на Беговой улице.

Автор в молодости занимался легкой атлетикой и бегал сам, без лошади (вместо лошади) на этом ипподроме на приз газеты «Правда». И не просто в молодости, а в «детстве, отрочестве, юности». Давайте отложим на время роман «Анна Каренина» с его «гипподромом» и обратимся к этой автобиографической трилогии Толстого, в которой можно прочесть такие строки, очень подходящие для нашей книги: *«Я готовлюсь в математический факультет, и выбор этот, по правде сказать, сделан мной единственно потому, что слова: синусы, тангенсы, дифференциалы, интегралы и т.д., чрезвычайно нравятся мне».* Слово «эллипс», как вполне можно предположить, также привлекало Левушку Толстого, виноват, Николеньку Иртеньева – героя трилогии[2].

В повести «Юность» есть глава XI «Экзамен по математике» (вступительный экзамен на математический факультет Московского университета), который герой трилогии сдал не совсем честно – он не по своей воле поменялся билетами с товарищем. Профессору же, который это заметил, было сказано, что билетами не менялись, а только дали их друг другу посмотреть. А в билете, взятом героем повести у товарища, был вопрос о *биноме Ньютона* $(a + b)^n$, который Николенька Иртеньев знал. Не успел же он подготовить к экзамену вопрос о *сочетаниях* (одно из понятия комбинаторики – см. ниже). Этот вопрос в результате обмена билетами достался товарищу, провалившему экзамен. Не отсюда ли идет знаменитое булгаковское *«Подумаешь, бином Ньютона!»*? И у Замятина в романе «Мы» можно прочесть: *«...но для вас это, может быть, почище, чем бином Ньютона»*. В настоящее время мы, вооружившись компьютером, вполне можем воскликнуть даже так: «Подумаешь, трином Ньютона!» (рис. 1.2).

$$(a+b+c)^2 \xrightarrow{expand} b^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot c\cdot b+a^2+2\cdot c\cdot a+c^2$$

$$(a+b+c)^3 \xrightarrow{expand} b^3+3\cdot a\cdot b^2+3\cdot c\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b+6\cdot c\cdot a\cdot b+3\cdot c^2\cdot b+a^3+3\cdot c\cdot a^2+3\cdot c^2\cdot a+c^3$$

$$(a+b+c)^4 \xrightarrow{expand} b^4+4\cdot a\cdot b^3+4\cdot c\cdot b^3+6\cdot a^2\cdot b^2+12\cdot c\cdot a\cdot b^2+6\cdot c^2\cdot b^2+4\cdot a^3\cdot b+12\cdot c\cdot a^2\cdot b^{\cdots}$$

$$(a+b+c)^5 \xrightarrow{expand} b^5+5\cdot a\cdot b^4+5\cdot c\cdot b^4+10\cdot a^2\cdot b^3+20\cdot c\cdot a\cdot b^3+10\cdot c^2\cdot b^3+10\cdot a^3\cdot b^2+30\cdot c\cdot a^2\cdot b^{\cdots}$$

$$(a+b+c)^6 \xrightarrow{expand} b^6+6\cdot a\cdot b^5+6\cdot c\cdot b^5+15\cdot a^2\cdot b^4+30\cdot c\cdot a\cdot b^4+15\cdot c^2\cdot b^4+20\cdot a^3\cdot b^3+60\cdot c\cdot a^2\cdot b^{3\cdots}$$

$$(a+b+c)^7 \xrightarrow{expand} b^7+7\cdot a\cdot b^6+7\cdot c\cdot b^6+21\cdot a^2\cdot b^5+42\cdot c\cdot a\cdot b^5+21\cdot c^2\cdot b^5+35\cdot a^3\cdot b^4+105\cdot c\cdot a^2\cdot b^{4\cdots}$$

Рис. 1.2. Триномиальное разложение на компьютере

[1] В аналитической геометрии термин «овал» означает любую гладкую замкнутую плоскую кривую. В обыденной речи овал – это сугубо выпуклая гладкая замкнутая кривая, которую любая прямая пересекает только в двух точках. Термин «овал» происходит от латинского слова ovum – яйцо. И второе замечание. По идее, соединять отрезки прямых на дорожке ипподрома должны не полуокружности, а более сложные кривые, у которых кривизна плавно меняется от нуля (отрезок прямой) до значения кривизны окружности (к таким кривым мы вернемся в конце книги при описании эллипса Толстого). Так, например, устроены рельсы трамваев и поездов, чтобы на поворотах не было резких боковых толчков. Но на беговых дорожках этого можно не делать – лошадь или человек сами выберут оптимальную траекторию бега. Эпсомский ипподром, который в ясную погоду был виден из дома старого Форсайта в Робин-Хилле под Лондоном, имеет более сложную форму, которую никак нельзя назвать овалом даже в английском понимании этого слова. Этот ипподром можно увидеть на картах – реальных или интернетовских. Можно предположить, что Эпсомский ипподром имеет форму эллипса, но не простого, а с более чем двумя фокусами [18]. Роман «Сага о Форсайтах» [2] упомянут здесь неслучайно. Вполне обоснованно считается, что Джон Голсуорси много чего позаимствовал у Толстого, в том числе некоторые важные сюжетные линии из «Анны Карениной»: гувернантка-иностранка вносит разлад в семью (*все смешалось в домах Облонских и Форсайтов*), замужняя женщина уводит жениха у своей подруги, история похождений распутных Стивы и Монти, скачки, владение лошадьми, отбытие на войну в далекую страну, красочные семейные сцены, тщетные попытки Каренина и Сомса Форсайта вернуть в семью неверную жену, подробное описание процесса смерти человека – старого Форсайта и брата Левина, оттопыренные уши нелюбимого мужа (уши Фавна) и т.д. и т.п.

[2] Но сам Толстой поступил на факультет восточных языков Казанского университета, а затем перешел на юридический факультет, который так и не закончил. «Ученого учить – только портить!» Другой знаменитый недоучившийся казанский юрист В.И. Ленин называл Толстого «матерым человечищем», «глыбой». Кстати, прошение о приеме в университет Толстой писал на имя самого Лобачевского, первооткрывателя неэвклидовой геометрии, который тогда был ректором (см. http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/TL.png). А на математическом факультете уже учились братья Льва Николаевича – Николай, Сергей и Дмитрий, которых мы еще упомянем.

Кстати, о Замятине. Упомянутый знаменитый роман-антиутопия начинается так:

«Я просто списываю – слово в слово – то, что сегодня напечатано в Государственной Газете:

“Через 120 дней заканчивается постройка ИНТЕГРАЛА. Близок великий, исторический час, когда первый ИНТЕГРАЛ взовьется в мировое пространство. Тысячу лет тому назад ваши героические предки покорили власти Единого Государства весь земной шар. Вам предстоит еще более славный подвиг: стеклянным, электрическим, огнедышащим ИНТЕГРАЛОМ проинтегрировать бесконечное уравнение Вселенной...”»

Можно еще упомянуть Александра Блока с его поэмой «Скифы»: *«Идите все, идите на Урал! / Мы очищаем место бою / Стальных машин, где дышит интеграл, / С монгольской дикою ордою!»*

В интернете, книгах и журналах можно найти фотографии и рисунки, изображающие некоего яйцеголового человека, стоящего у доски и пишущего мелом страшные математические формулы с интегралами.

Мы еще доберемся до интеграла и интегрального исчисления в романах Толстого. Можно предположить, что Замятин идею Всеобъемлющего Интеграла мог позаимствовать у Льва Николаевича. Но Замятин был по специальности кораблестроителем, так что обращение к интегралу у него, возможно, было и вне толстовского контекста.

Однако вернемся к биному Ньютона.

На рис. 1.2 триномиальное разложение полностью показано только для второй и третьей степеней. Разложение со степенями 4, 5, 6 и 7 не уместилось на рисунке – там алгебраическое выражение заканчивается многоточием. Да и не нужно такое длинное разложение показывать полностью. Главное, чтобы читатель-филолог понял суть этого разложения (избавление от скобок) и не боялся бинома Ньютона в литературе и жизни!

В школе *«мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь»*. Заучивали, в частности, простейший бином Ньютона для степени, равной двум: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Мы запоминали эту формулу, не зная, что это тот самый «страшный бином Ньютона», которым

до сих пор пугают гуманитариев. Простейший – но тем не менее бином! Во времена Толстого, да и сейчас разрезают квадратный лист бумаги двумя ($n = 2$) разрезами на четыре части ($2^2 = 4$) так, чтобы получить маленький квадрат площадью a^2, большой квадрат площадью b^2 и два прямоугольника площадью ab каждый (рис. 1.3). Это самая простая и наглядная геометрическая трактовка выражения $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

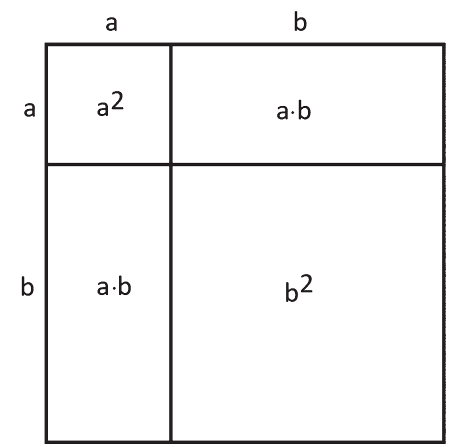


Рис. 1.3. Геометрическое толкование формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Кое-кого заставляли бездумно заучивать формулы биномиальных коэффициентов и сами коэффициенты для степени больше двух. Можно взять не квадратный лист бумаги (см. рис. 1.3), а, например, кусок сыра в виде куба и разрезать его ножом тремя разрезами ($n = 3$) на восемь частей ($2^3 = 8$) так, чтобы получился один маленький куб объемом a^3, один большой куб объемом b^3, три прямоугольных параллелепипеда объемом a^2b и три прямоугольных параллелепипеда объемом ab^2. Это будет биномиальный куб Монтессори. Сразу вспоминается сказка Толстого о том, как мужик для барина жареного гуся делил. Правда, не на восемь, а на семь частей: голову барину, задок (гузку) барыне, лапки сыновьям, крылышки дочерям. А гусиную тушку хитрый мужик забрал себе.

Люди с богатым пространственным воображением могут четырьмя взмахами ножа разрезать воображаемый четырехмерный куб на 16 частей и получить соответствующие коэффициенты. Квадратный лист бумаги можно также по краям разметить не на две части a и b, а на три части a, b и c и получить «бумажные» коэффициенты не бинома, а тринома Ньютона. Во времена Толстого, да и сейчас, было такое семейное времяпрепровождение: взрослые и дети собирались за столом и вырезали из бумаги, а потом клеили и раскрашивали всякие фигурки – елочные украшения, например. Можно предположить, что во время таких посиделок заодно изучался и бином Ньютона в форме увлекательного занятия алгеброй и геометрией. Такого игрового подхода не хватало старому князю Болконскому (о нем речь впереди), когда он занимался со своей дочерью математикой.

Кстати, похожее на бином Ньютона выражение $a^n + b^n = c^n$ («трином» Ферма) будоражило умы многих математиков и нематематиков несколько веков! Лев Толстой, как вполне можно предположить, знал про эту самую известную и самую мистическую математическую теорему – про большую теорему Ферма, которая была доказана сравнительно недавно – в 1994 году. Увы, исчезла еще одна тайна математического мироздания! Теперь можно воскликнуть и так: «Подумаешь, теорема Ферма!»

Можно поговорить о биноминальных коэффициентах в филологическом, а не в математическом плане. Автор намеренно только что в прилагательном «биномиальный» написал лишнюю букву «н». Читатель, заметил ли ты это? Скорее всего, нет. И система проверки правописания (спел-чекер) текстового процессора, где создавалась эта книга, тоже этого не заметила. А вот прилагательное «триноминальный» компьютерный проверщик орфографии подчеркнул красной волнистой чертой и предложил замену – «триномиальный». В математических текстах можно встретить термины и «биномиальный», и «биноминальный». Однако математические ортодоксы считают, что это не синонимы, а паронимы – слова, сходные по звучанию и морфемному составу, но различающиеся лексическим значением (см. https://dxdy.ru/post1518022.html#). Здесь еще играет

свою роль и то, что слово «биноминальный» более благозвучно. В слове «биномиальный» как бы проглатывается буква «н». Тут можно упомянуть, что в романе «Война и мир» Василий Денисов проглатывал букву «р».

К паронимам можно условно отнести женские имена Наталья и Наталия. Вроде бы это одинаковые имена, но если у кого-то в разных документах окажутся такие имена, то будут проблемы. А это имя мы вспомнили неслучайно – героиню романа «Война и мир» звали Наталья, а не Наталия. Имя Наталья в романе, как ни странно, встречается всего три раза, и то в сочетании с отчеством Ильинишна (не Ильинична; московское «булошная», а не питерское «булочная»). А так все либо Наташа, либо на французский манер Натали.

Команда компьютерных аналитических преобразований (символьной математики) expand (развернуть – см. рис. 1.2) легко проводит биномиальные, триномиальные и другие подобные разложения. Команда factor (факторизация, сворачивание) проводит обратную операцию. В настоящее время уроки алгебры в школах и университетах нередко сводятся к освоению команд символьной математики в средах математических пакетов Maple, Mathematica, SMath, Mathcad (последний пакет был задействован в написании этой книги). Такая «подпорка», берущая на себя рутинные математические преобразования, может помочь и гуманитариям понять и полюбить математику. Нахождение наименьшего общего кратного, наибольшего общего делителя – всего того, чем многих людей «докомпьютерного» поколения «терроризировали» в начальной школе при изучении обыкновенных (простых) дробей (см. ниже рис. 2.1), – теперь стало рутинными операциями! И не только для двух чисел, а для любого количества чисел. Хорошо это или плохо с точки зрения методики и эффективности учебного процесса – разговор особый, и мы этого вопроса еще коснемся ниже. Но надо признать, что компьютер перевел изучение математики школьниками и студентами от тупого заучивания теорем и формул к пониманию их сути – от рутинной работы к работе творческой. Или наоборот, как с грустью и сожалением полагают некоторые преподаватели и методисты.

Заканчивая разговор о биноме Ньютона, отметим, что Конан Дойль так пишет о профессоре Мориарти: *«…когда ему исполнился 21 год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность…»* У Юлиана Тувима есть прекрасное стихотворение «Наука» в духе философии Толстого. Начинается оно так (русский слегка зарифмованный подстрочник – https://scholar-vit.livejournal.com/141150.html):

Да, учили нас, кажется, знатно
Логарифмам, биному Ньютона,
Тщась пособиями из картона
Бесконечность сделать понятной.

А заканчивается стихотворение пронзительно:

Сделай милость,
Оставь меня, Боже,
Второгодником в жизненной школе.

В поэтическом переводе Давида Самойлова бином Ньютона и Бог пропали:

Всем премудростям я обучался:
Логарифмы, задачи, квадраты.
Грыз я формулы. Запанибрата
С бесконечностью я обращался.
<…>
Ах, остаться бы мне, если можно,
Второгодником в жизненной школе!

С Богом здесь все более-менее ясно – в советское время на это слово было наложено табу. Вот поэтому-то, можно предположить, советская власть не устояла – опираться можно на три точки «Наука–Искусство–Религия», а не на две «Наука–Искусство», да и то сильно извращенные. А почему бином Ньютона пропал? Здесь можно развести целую математико-филологическую «философию». Но не будем этого делать – такой «философии» и так в избытке в этой книге. Скажем лишь, что автору в юности этот самый бином Ньютона круто повернул жизнь. Сначала казалось, что в худшую сторону, а потом оказалось, что в лучшую. Но это разговор особый и долгий (см. www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/EEE-2-2022-My-Energy.pdf).

Следует отметить также, что логарифм присутствует в обоих вариантах перевода стихотворения Юлиана Тувима. Логарифмом, а именно десятичным логарифмом, тоже мучили многих школьников, не склонных к математике, к точным наукам. В наш компьютерный век оказалось, что десятичный логарифм совершенно не нужен, так как вычисления можно спокойно проводить и без него (вспомним ушедшую в прошлое логарифмическую линейку, сводящую умножение к сложению, а деление к вычитанию). Остался только натуральный логарифм в некоторых аналитических преобразованиях, которые тоже уступают место численным расчетам на компьютере. Десятичный логарифм – это атрибут ручных вычислений. Он присутствует, например, в децибеле и в значении pH воды и растворов.

Итак, можно предположить, что Толстой знал, что такое бином Ньютона. А вот теорию сочетаний Толстой не знал. Этот вывод можно сделать из повести «Юность». А ведь эти понятия тесно связаны!

Во времена Толстого гимназистам и студентам военизированной России предлагали решить такую задачу. Ты офицер, и тебе нужно из полдюжины солдат назначить дежурными одного, двоих, троих, четверых, пятерых или всех шестерых. Сколько вариантов (сочетаний!) такого наряда имеется? На рис. 1.4 показано простое компьютерное решение этой задачи, из которого, в частности, видно, что больше всего вариантов (20) будет, если назначать в наряд троих солдат из шести с именами *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f*. Варианты наряда: 1) *abc*, 2) *abd*, 3) *abe*, 4) *abf*, … и наконец 20) *def*. Читатель, заполни для тренировки пропуск-многоточие!

$$n := 6 \qquad k := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 20 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.4. Число сочетаний из *n* по *k* (в среде Mathcad эту работу выполняет функция combin: combin(6, 3)=20)

Числа 1, 6, 15 и 20 образуют вершину так называемого треугольника Паскаля, содержащего эти самые знаменитые ньютоновские биномиальные коэффициенты (рис. 1.5). В этом треугольнике легко просматриваются такие «треугольные» суммы: 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, 4 + 6 = 10, 5 + 10 = 15 и наконец 10 + 10 = 20. Можно продолжить такое суммирование и получить биномиальные коэффициенты для седьмой степени: 1, 7 (3 + 4), 21 (6 + 15) и 35 (15 + 20). Подумаешь, бином Ньютона! Вот на какие хитрости приходилось идти в докомпьютерную эру! Голь (люди без компьютера) на выдумки хитра!

$$(a+b)^0 \to 1$$

$$(a+b)^1 \to 1\ a+1\ b$$

$$(a+b)^2 \xrightarrow{expand} 1\ a^2+2\cdot a\cdot b+1\ b^2$$

$$(a+b)^3 \xrightarrow{expand} 1\ a^3+3\cdot a\cdot b^2+3\cdot a^2\cdot b+1\ b^3$$

$$(a+b)^4 \xrightarrow{expand} 1\ a^4+4\cdot a\cdot b^3+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a^3\cdot b+1\ b^4$$

$$(a+b)^5 \xrightarrow{expand} 1\ a^5+5\cdot a\cdot b^4+10\cdot a^2\cdot b^3+10\cdot a^3\cdot b^2+5\cdot a^4\cdot b+1\ b^5$$

$$(a+b)^6 \xrightarrow{expand} 1\ a^6+6\cdot a\cdot b^5+15\cdot a^2\cdot b^4+20\cdot a^3\cdot b^3+15\cdot a^4\cdot b^2+6\cdot a^5\cdot b+1\ b^6$$

Рис. 1.5. Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля

Триномиальные коэффициенты (см. рис. 1.2) группируются уже не в треугольник, а в пирамиду (тетраэдр) Паскаля.

В наше время школьникам и студентам задают такой вопрос. У тебя есть шесть символов (*n*), из которых нужно создать пароль длиной от одного до шести символов (*k*). Сколько вариантов такого пароля имеется? Это будут *сочетания с повторением* (они называются также *наборами*), в которых каждый элемент может участвовать несколько раз (с солдатами в наряде этого сделать нельзя). На рис. 1.6 показано решение этой задачи.

$$n := 6 \qquad k := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 56 \\ 126 \\ 252 \\ 462 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.6. Сочетание с повторением

Можно только удивляться и восхищаться тем, как во времена Толстого несчастные, а может, наоборот, счастливые, бескалькуляторные, бескомпьютерные гимназисты и студенты все это проделывали в уме или на листочке бумаги. Или на классной доске. Читаем в той же «Юности»: *«Я стоял около окна <…> и решал на черной доске какое-то длинное алгебраическое уравнение. В одной руке я держал изорванную мягкую "Алгебру" Франкера, в другой – маленький кусок мела <…>, а в третьей – тряпку»*. Шутка! Третьей руки, конечно, не было. Еще одну руку автор приписал, подражая Зощенко. Третья рука школьнику и студенту не нужна, а вот вторая (третья, четвертая…) голова не будет лишней для параллельных вычислений, которые сейчас в нашем цифровом мире стали очень актуальными.

Здесь уместно будет отметить, что еще во времена детства Льва Толстого появилась первая программа для аналитической машины Чарльза Бэббиджа (1834), которую написала Ада Лавлейс (дочь Байрона). В ней были заложены будущие принципы построения программ для ЭВМ.

Арифметика Магницкого, алгебра Франкера… Первый учебник у всех на слуху, а вот второй – нет. Читатель, запусти поиск в интернете по ключевым словам «алгебра Франкера» и узнай много интересного об этой книге, на которой выросло несколько поколений русских интеллигентов с техническим образованием. Вполне обоснованно считается, что все современные школьные учебники алгебры – это переписанные учебники Франкера, а все современные вузовские учебники по математическому анализу – это переписанные учебники Эйлера, который много работал в Санкт-Петербурге и там похоронен.

Вот как неожиданно всплыли одинаковые числа в разных, казалось бы, математических задачах – в биноме Ньютона и в сочетаниях. Такое можно наблюдать и в литературных произведениях (см. конец сноски 1 на стр. 14). Можно, повторяем, упрекнуть Голсуорси в заимствованиях у Толстого (а эта мысль приходит почти всем, кто вдумчиво прочел оба романа по-русски и по-английски), а можно предположить, что это никакой не плагиат и даже не вполне допустимое заимствование, а что-то другое – одинаковые «числа» в двух разных математических задачах, пардон, романах. Анри Труайя (Лев Тарасов) в своей книге о Льве Толстом пишет, что Толстой «позаимствовал» название романа «Война и мир» у Прудона, который в 1858 году уже написал книгу с таким названием. Кстати, и Ньютона, и Лейбница (а именно Лейбниц ввел в математику термин «комбинаторика») до сих пор упрекают в том, что они много чего «позаимствовали» друг у друга, создавая теорию дифференциального и интегрального исчисления. Этот «англосаксий» спор (Лейбниц работал в Лейпциге – в одном из городов Саксонии) вылился в такой «филологический» вопрос: как именовать основную теорему математического анализа – теорема Ньютона–Лейбница или теорема Лейбница–Ньютона? Мы в России говорим «теорема Ньютона–Лейбница» не потому, что вклад Ньютона был больше, а потому, что... так звучит благозвучнее, хотя Лейбниц стоит впереди Ньютона согласно русскому и латинскому алфавитам. Но в английском и немецком языках пошли на компромисс. Там эту теорему называют так: Fundamental theorem of calculus и Fundamentalsatz der Analysis, – понимая, что сейчас нам уже не разобраться, что было раньше – курица или яйцо. Многие считают, что эта теорема была известна еще учителю Ньютона – тоже Исааку, но Барроу (Isaac Barrow). Ньютон же просто «забрался на плечи своего учителя, чтобы видеть дальше». Темная история, читатель! Оставим ее! Добавим лишь то, что в линейной алгебре (второй по значимости курс высшей математики в технических вузах после математического анализа) тоже царит неразбериха касательно авторства основной теоремы – теоремы о единственности решения системы линейных алгебраических уравнений, которую в разных странах

называют по-разному и связывают с разными математиками: теорема Rouché–Capelli в англоязычных странах, в Италии и Бразилии; Kronecker–Capelli в Австрии, Польше, Румынии и России; Rouché–Fontené во Франции; Rouché–Frobenius в Испании и многих странах Латинской Америки; Frobenius в Чехии и Словакии. Так сказано в Википедии. А вот в книге «Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей» (М.: Наука, 2008) утверждается, что первое доказательство этой теоремы дал Чарльз Доджсон (1832-1898), написавший «Алису в Стране чудес» под псевдонимом Льюис Кэрролл.

Кстати, об уравнениях и их неизвестных. Вот что можно прочесть в романе «Война и мир» (том 4, часть 3, глава II): *«Дух войска – есть множитель на массу, дающий произведение силы. Определить и выразить значение духа войска, этого неизвестного множителя, есть задача науки. Задача эта возможна только тогда, когда мы перестанем произвольно подставлять вместо значения всего неизвестного X те условия, при которых проявляется сила, как-то: распоряжения полководца, вооружение и т.д., принимая их за значение множителя, а признаем это неизвестное во всей его цельности, то есть как большее или меньшее желание драться и подвергать себя опасности. Тогда только, выражая уравнениями известные исторические факты, из сравнения относительного значения этого неизвестного можно надеяться на определение самого неизвестного. Десять человек, батальонов или дивизий, сражаясь с пятнадцатью человеками, батальонами или дивизиями, победили пятнадцать, то есть убили и забрали в плен всех без остатка и сами потеряли четыре; стало быть, уничтожились с одной стороны четыре, с другой стороны пятнадцать. Следовательно, четыре были равны пятнадцати, и, следовательно, 4x = 15y. Следовательно, x : y = 15 : 4. Уравнение это не дает значения неизвестного, но оно дает отношение между двумя неизвестными. И из подведения под таковые уравнения исторических различно взятых единиц (сражений, кампаний, периодов войн) получатся ряды чисел, в которых должны существовать и могут быть открыты законы»*. Здесь Толстой начинает с аллюзии на второй закон Ньютона и кончает упоминанием одного из способов решения уравнения через замену выражения на новую переменную.

В этом же романе Толстой записал такое уравнение с двумя неизвестными $x + y = 43$: *«Долохов уже не слушал и не рассказывал историй; он следил за каждым движением рук Ростова и бегло оглядывал изредка свою запись за ним. Он решил продолжать игру до тех пор, пока запись эта не возрастет до сорока трех тысяч. Число это было им выбрано потому, что сорок три составляло сумму сложенных его годов с годами Сони»* (рис. 1.7). Чему равны x и y? Но это уравнение легко решается. Из романа можно узнать, что Соне в 1805 году было пятнадцать лет, а в 1806 – соответственно, шестнадцать. Знаменитый карточный проигрыш Ростова Долохову имел место в 1806 году. Следовательно, Долохову в этом году было 27 лет: уравнение превращается в тождество $16 + 27 = 43$.

Рис. 1.7. Николай Ростов проигрывает в карты Долохову (рисунок Игоря Караша, источник: http://karashillustration.com/War-Peace-by-Leo-Tolstoy)

Уравнение карточного проигрыша Ростова Долохову $x + y = 43$ можно считать недоопределенной системой линейных уравнений с двумя неизвестными. Ранг основной матрицы (горизонтального вектора) этой системы (1 1) равен единице. Единице равен и ранг расширенной матрицы (1 1 43). Следовательно, согласно теореме Кронекера–Капелли, эта система имеет решение. Но их бесконечное множество, так как число неизвестных больше ранга обеих матриц. Вот так необходимо решать задачу о карточном проигрыше Ростова с точки зрения формальной математики.

Математика карточной игры, в которую играли Николай Ростов и Долохов (фараон или штосс), предельна проста. Она сводится к генерации случайного числа 0 или 1. Можно просто подбрасывать монетку и смотреть, что выпало – орел или решка (чет-нечет). Или вдвоем выбрасывать из кулака разное число пальцев, определяя их четное или нечетное количество (армейско-тюремный вариант). Но карты вместо монетки добавляют в игру загадочность, некий романтизм, психологию (вспомним пушкинскую «Пиковую даму») и... шулерство. Чем и не преминул воспользоваться Долохов, обыгрывая молодого Ростова. Сам Толстой, кстати говоря, проиграл в карты дом в Ясной Поляне, который разобрали на бревна и вывезли. В языках программирования и в математических программах есть генератор псевдослучайных чисел. Они отличаются от истинно случайных чисел тем, что порядок их выдачи повторяется. Это сделано для удобства отладки программ.

У Достоевского в повести «Игрок» автор в семи цитатах увидел переопределенную систему из семи линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными, решение которой дает курс в рублях талера, фридрихсдора, флорина, гульдена и франка [13, 28].

Кстати, о литературных заимствованиях и математике.

Можно предположить, что первая и самая известная фраза из «Анны Карениной» *«Все счастливые семьи похожи друг на друга, каждая несчастливая семья несчастна по-своему»* навеяна Толстому Александром Дюма. Читаем в «Графе Монте-Кристо»: *«Все почерки правой руки разные, а почерки левой все похожи друг на друга»*.

Этот тезис Толстого и Дюма можно перевести на язык математической логики.

Обозначим через F множество семей. Будем считать, что каждая семья f характеризуется типом отношений между мужем и женой t (счастливая, несчастная) и качественным описанием этих отношений q. В этих терминах тезис Толстого приобретает вид

$$\forall\left(f, g \in F,\ t(f)=t(g)=\text{"счастливая"}\right) \Rightarrow q(f)=q(g),$$

$$\forall\left(f, g \in F, f \neq g,\ t(f)=t(g)=\text{"несчастная"}\right) \Rightarrow q(f) \neq q(g),$$

где: $\forall$ – квантор общности (перевернутая буква A – от англ. All), понимается и читается как «для всех», «для любого(-ой, -ых)»;

$\in$ – принадлежит;

$\Rightarrow$ – импликация (от лат. implicatio – связь) – бинарная логическая связка, по своему применению приближенная к союзу «если…, то…».

Обозначим через P множество пишущих людей. Будем считать, что каждое письмо характеризуется выбором руки написания r (правая, левая) и почерком s. В этих терминах цитата из Дюма приобретает вид

$$\forall\left(p, q \in P,\ r(p)=r(q)=\text{"левая"}\right) \Rightarrow s(p)=s(q),$$

$$\forall\left(p, q \in P,\ p \neq q,\ r(p)=r(q)=\text{"правая"}\right) \Rightarrow s(p) \neq s(q).$$

Мы видим, что логические обоснования этих двух этих тезисов эквивалентны, хотя тезис Толстого можно отнести к философии, а Дюма – к криминалистике (вспомним, что сюжет «Графа Монте-Кристо» при всей его экстравагантности Дюма взял из криминальных хроник).

Та часть математической логики, которая связана с исчислением предикатов, сформировалась полностью только в XX веке в работах Гильберта и Рассела, хотя отдельные идеи были еще у упомянутого нами Лейбница. Булева алгебра появилась раньше, в середине XIX века (де Морган, Буль), и нашла выражение в литературе в дедуктивном методе таких персонажей, как Огюстен Дюпен (Эдгар По), Шерлок Холмс (Конан Дойль).

Первое предложение романа «Анна Каренина» дало жизнь одноименному принципу. Чтобы семья была счастлива, нужно одновременное выполнение некоторых условий (здоровье членов семьи, относительное финансовое благополучие, взаимное доверие и привязанность…). Успех любого проекта, замысла или дела также возможен лишь при одновременном наличии ряда факторов (принцип Анны Карениной, но не героини романа, а самого романа). Толстой был свидетелем грандиозного социального проекта в России – отмены крепостного права. Можно проанализировать эту «революцию сверху» с позиций принципа Анны Карениной.

Рассчитать факториал (оператор с восклицательным знаком – см. рис. 1.4 и 1.6) или скопировать его из таблицы было проблемой во времена Толстого! Для читателей-нематематиков напоминаем, что факториал – это произведение всех натуральных чисел до данного числа, включая и данное число: 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720 и т.д. Проверяйте: факториал шести $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. А для некоторых читателей-математиков скажем, что факториал нуля равен не ожидаемому нулю, а единице не по определению, как записано во всех справочниках и учебниках, а по… нисходящему расчету. Факториал пяти равен 120 – это легко подсчитать даже в уме. Факториал четырех равен 24 (120/5), факториал трех равен 6 (24/4), факториал двух равен 2 (6/3), факториал единицы равен 1 (2/2) и наконец факториал нуля равен… 1 (1/1). Такой рекуррентный расчет, если его вести с нецелыми числами (с реальными и комплексными) приводит к гамма-функции Эйлера $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, которая не оставит равнодушным ни одного математика. Без рекуррентности гамма-функция вычисляется через толстовско-левинские интегралы (о них мы скажем ниже) с одним бесконечным пределом. В духе толстовской философии можно сказать, что живущий человек – это тоже интеграл с одним неизвестным пределом. У скончавшегося же человека в его интеграле оба предела заданы.

Теорию сочетаний можно связать с литературой и так. У нас имеется полусотня знаков (буквы, числа и знаки препинания) – сколько из них можно составить… литературных произведений? Или так. Считается, что литературных сюжетов не так уж и много – их насчитывают, по разным оценкам, от четырех (по Борхесу) до 36. Сколько можно составить литературных произведений, если в них сочетать разные сюжетные линии? Вот для справки список этих 36 сюжетов: *Мольба*; *Спасение*; *Месть, преследующая преступление*; *Месть близкому за близкого*; *Затравленный*; *Внезапное* *несчастье*; *Жертва кого-нибудь*; *Бунт*; *Отважная попытка*; *Похищение*; *Загадка*; *Достижение*; *Ненависть между близкими*; *Соперничество между близкими*; *Адюльтер, сопровождающийся убийством*; *Безумие*; *Фатальная неосторожность*; *Невольное кровосмешение*; *Невольное убийство близкого*; *Самопожертвование во имя идеала*; *Самопожертвование ради близких*; *Жертва безмерной радости*; *Жертва близким во имя долга*; *Соперничество неравных*; *Адюльтер*; *Преступление любви*; *Бесчестие любимого существа*; *Любовь, встречающая препятствия*; *Любовь к врагу*; *Честолюбие*; *Борьба против бога*; *Безосновательная ревность*; *Судебная ошибка*; *Угрызения совести*; *Вновь найденный* и *Потеря близких*. Читатель может попытаться выбрать из этого списка (множества, как говорят математики) элементы, входящие в три романа Толстого, о которых будет вестись «математический» разговор в этой книге: «Война и мир», «Анна Каренина» и «Воскресение». А вот еще задание читателю. Вписать в вышеприведенный список сюжетов еще один сюжет. Это будет похоже на решение такой уже не литературной, а математической задачи – приписать в конец рассчитанному на компьютере списку цифр, образующих число π, еще одну цифру. Есть такой анекдот, связанный с шифровальным делом (см. раздел 3): мой PIN-код запомнить просто – это последние четыре цифры числа π.

Сумма чисел от 1 до 36 (максимальное число сюжетов) – это 666, к которому мы еще вернемся. Рулетку с секторами, пронумерованными от 0 (зеро) до 36, часто называют чертовым колесом, намекая на то, сколько денег было на рулетке проиграно. Но здесь подмешана и математика!

Если мы коснулись натуральных чисел в математическом образовании, то следует обязательно упомянуть о том, что Толстой организовал в Ясной Поляне школу для крестьянских детей и даже сам придумывал для них задачи по арифметике и логике (см., например, https://infourok.ru/prezentaciya-zadachi-lva-nikolaevicha-tolstogo-1318081.html; одну такую задачу мы решим по-новому ниже). Можно предположить, что во время таких «придумываний» у Толстого и возникла знаменитая философско-арифметическая мысль: *«Человек подобен дроби, числитель есть то, что он есть,*

а знаменатель – то, что он о себе думает. Чем больше знаменатель, тем меньше дробь».

Формулу Толстого с дробью можно отнести и к… статьям и книгам: *«Научная статья или книга подобна дроби, числитель – это общее число литературных ссылок, приведенных в конце статьи или книги, а знаменатель – число ссылок на работы самого автора (самоцитирование). Чем больше знаменатель, тем меньше дробь»*. В данной книге 33 ссылки, из которых 25 (!) – это ссылки на авторские работы. Но не спешите делать вывод об авторе по вышеприведенной формуле! Среди обыкновенных дробей есть так называемые составные дроби, числитель и/или знаменатель которых – это не число, а новые обыкновенные дроби. Все статьи и книги автора открыты для чтения – в списке литературы они дополнены соответствующими URL-адресами. Если следовать им, то откроются, во-первых, подробное авторское описание затронутой математической проблемы и, во-вторых, новые списки литературы, к которым также можно приложить нашу модифицированную и весьма сомнительную формулу Толстого. В этих новых списках доля авторских работ будет маленькой.

2. ПОГОВОРИМ О ДРОБЯХ

На рис. 2.1 показан пример компьютерной работы с дробями – нужно обработать не две, как в школе, а три смешанные дроби – сложить две первые, а из суммы вычесть третью (см. первую строку на рис. 2.1; читатель, попытайся сделать этот расчет сам на листочке бумаги). Можно в среде Mathcad сразу автоматически посчитать это выражение, получив по умолчанию в ответе десятичную дробь, отформатировав ее затем в смешанную простую (см. последний оператор на рис. 2.1). А можно вспомнить, как нас в начальной школе педантично учили это делать, и воспроизвести пошагово на компьютере школьные знания и навыки по арифметике простых дробей.

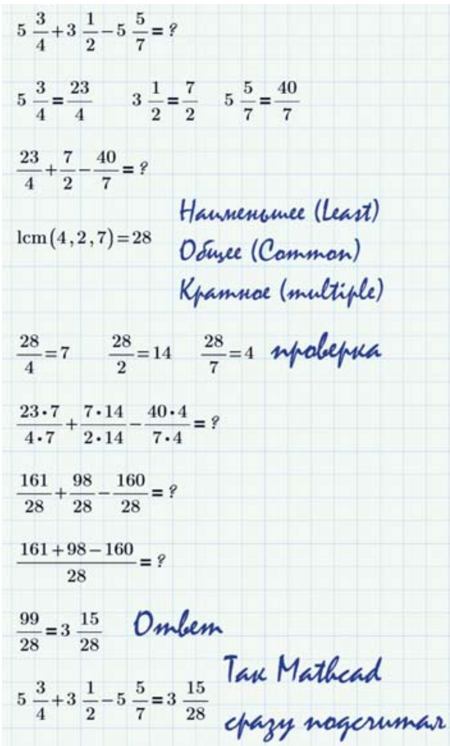


Рис. 2.1. Работа на компьютере с простыми (обыкновенными) дробями

На второй строке расчета на рис. 2.1 смешанные дроби переводятся в неправильные – в дроби, у которых знаменатель меньше числителя (эту работу также делает компьютер автоматически). Затем (центральный момент расчета!) вызывается функция lcm, возвращающая уже упомянутое наименьшее (least) общее (common) кратное (multiple) любого количества целых чисел. В нашем случае их три: 4, 2 и 7 (знаменатели трех исходных дробей). Далее с опорой на найденное наименьшее общее кратное (у нас это число 28, запомним его!) все три дроби получают одинаковый знаменатель. Задача фактически решена! Кстати, вот что написал сам Лев Толстой про число 28: *«Я родился в двадцать восьмом году, двадцать восьмого числа»* <...> *и всю мою жизнь двадцать восемь было для меня самым счастливым числом. И вот только недавно мне пришлось узнать, что и в математике двадцать восемь есть особенное “совершенное” число»*. Совершенное число – это натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей (то есть всех положительных делителей, отличных от самого числа). Вот первые семь таких чисел: 6 (1+2+3), 28 (совершенное число Льва Толстого), 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056 и 137 438 691 328. Самое большое известное совершенное число содержит 44 677 235 знаков. Все найденные совершенные числа оказались четными. Теорема Ферма, как мы отметили выше, доказана. А вот две другие также простые по формулировке, но пока не решенные математические проблемы: существуют ли нечетные совершенные числа и бесконечно ли их количество? (Нечетных совершенных чисел до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует.) Неизвестно также, бесконечно ли множество всех совершенных чисел. Доказано, что нечетное совершенное число, если оно существует, имеет не менее девяти различных простых делителей и не менее 75 простых делителей с учетом кратности. У «толстовского» совершенного числа 28 пять делителей (1, 2, 4, 7 и 14), три из которых (2, 4 и 7) были задействованы в качестве знаменателей исходных дробей на рис. 2.1 (см. также сноску 16 на стр. 59).

Преподавание математики детям начинается со знакомства с целыми положительными числами, с натуральными числами *(«Предположим, что у вас в кармане два яблока. Некто взял у вас одно яблоко. Сколько у вас осталось яблок?»*) и простых (обыкновенных) дробей (см. рис. 2.1). Если пропустить этот этап и сразу перейти к работе с десятичными дробями и с калькулятором (а это современная распространенная в мире практика), то, как считают многие методисты, дальнейшее изучение математики пойдет вкривь и вкось. Если вообще пойдет. Но на уроках математики можно использовать не обычный, а особый калькулятор, умеющий работать и с простыми дробями, находить наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель и др. Так можно освободить младшеклассников от нудной рутинной работы, оставив им простор для творчества со сложными дробями. Далее может случиться волшебный переход от «нудной» арифметики к «чудесной» комбинаторике – к интереснейшему разделу математики, тесно связанному с современным цифровым миром, с программированием, с шифровальным делом. А это не только увлекательное занятие по технологии STEM, но и хороший «хлеб с маслом» на будущее, на цифровое наше будущее.

Расчеты в этой книге выполнены в среде математического пакета Mathcad и в среде сетевой версии пакета Mathematica – на сайте WolframAlpha.com (Стивен Вольфрам – разработчик пакета Mathematica). Пакет Mathcad имеет две ветви – традиционный Mathcad и совеменный Mathcad Prime. Это фактически два разных пакета. Старый добрый Mathcad имеет устаревшую, не очень качественную графику, но он умеет работать с простыми дробями – см. рис. 2.1. В среде же Mathcad Prime, увы, этот инструмент форматирования численного ответа отключили, что нехорошо для начальной стадии изучения математики в школе (см. выше). В настоящее время многие люди первую строку на рис. 2.1 трактуют так: пять помножить на три четвертых плюс три помножить на одну вторую минус пять помножить на пять седьмых. Пробел в середине дроби воспринимается как знак умножения, а не как знак сложения. Но в математике это обычное дело. Еще один пример такой двойственности: выражение *M* в степени *T* – это и операция возведения в степень, и операция транспонирования матрицы.

3. ШИФРОВАЛЬНОЕ ДЕЛО

В «Анне Карениной» есть изумительная сцена, когда Константин Левин и Кити Шербацкая наконец-то улаживают свои отношения. Для этого они переписываются мелом на зеленом сукне ломберного столика, используя особый шифр-аббревиатуру (см. начало книги с подобными «шифрами-аббревиатурами»), понятный только им. Здесь была некая двойная тайнопись. Они уединились, чтобы никто их не слышал. Но и этого им показалось мало – Левин и Кити стали шифровать мелом на зеленом сукне ломберного стола свои сообщения, настолько их разговор был сокровенным, касающимся только их двоих. За ломберным столом, кстати, состоялось признание в любви героев рассказа «Банковский билет в миллион фунтов стерлингов», написанный Марком Твеном в 1893 году.

Цитируем Толстого:

«– Я давно хотел спросить у вас одну вещь.

Он глядел ей прямо в ласковые, хотя и испуганные глаза.

– Пожалуйста, спросите.

– Вот, – сказал он и написал начальные буквы: КВМОЭНМБЗЛЭЧНИТ?

<…>

Он <…> подал ей мел и встал. Она написала: ТЯНМИО.

<…>

– Ну, так вот прочтите. Я скажу то, чего бы желала. Очень бы желала! – Она записала начальные буквы: ЧВМЗИПЧБ».

Эти аббревиатуры означали следующее: *«**к**огда **в**ы **м**не **о**тветили: **э**того **н**е **м**ожет **б**ыть, **з**начило **л**и **э**то, **ч**то **н**икогда, **и**ли **т**огда?»*, *«**т**огда **я** **н**е **м**огла **и**наче **о**тветить»* и *«**ч**тобы **в**ы **м**огли **з**абыть **и** **п**ростить, **ч**то **б**ыло»*.

У Толстого цепочки букв прописаны строчным шрифтом и разделены запятыми. Мы же здесь приводим их аббревиатурами, написанными по современным правилам. Аббревиатуры стали широко применять у нас в двадцатых годах прошлого века. Тогда же в этих сокращениях исчезли точки между буквами, а сами буквы стали все прописными (заглавными). Кстати, за аббревиатурой ТЯНМИО может скрываться какой-нибудь **Т**олстовский

Яснополянский **н**аучно-**м**етодический **и**нститут **о**бразования. Вспомним НИИЧАВО (НИИ чародейства и волшебства) из повести братьев Стругацких «Понедельник начинается в субботу».

Можно попробовать применить математику для расшифровки посланий Левина и Кити – перебрать на компьютере все слова, начинающиеся на эти буквы, и с помощью искусственного интеллекта с нейронными связями отобрать более-менее внятные фразы. А вот другие «тайные» примеры из литературы вполне пригодные для математического анализа [5].

Информатика – это наука о работе с информацией. В частности, о ее защите от посторонних взглядов. Кодировать письменные тексты помогает симбиоз математики и информатики под названием «криптография», или «тайнопись». Расшифровка одного такого текста красочно описана в рассказе Эдгара По «Золотой жук» (1843). Этого американского писателя по праву называют родоначальником детективного жанра в литературе. А Толстой, весьма вероятно, прочел этот рассказ и перенес идею шифрованной записки в роман «Анна Каренина».

Сюжет рассказа незамысловат. Один человек находит на берегу моря пергамент, приносит его домой и случайно оставляет у огня. На пергаменте от нагрева проступают таинственные символы:

53‡‡†305))6*;4826)4‡.)4‡);806*;48†8¶60))85;1‡(;:‡*8†83(88)5*†;46(;88
96?;8)*‡(;485);5*†2:*‡(;4956*2(5*–4)8¶8*;4069285);)6†8)4‡‡;1(‡9;4
8081;8:8‡1;48†85;4)485†528806*81(‡9;48;(88;4(‡?34;48)4‡;161;:188;‡?;

Подобные цепочки «таинственных» символов мы иногда видим на дисплее компьютера, когда выбрана неверная кодировка.

Человек, нашедший пергамент, расшифровывает текст и находит по нему запрятанный пиратами клад. Шифр был основан на замене букв исходного текста другими буквами или символами. Это один из самых древних и самых простых способов шифрования текстов. К настоящему времени разработано огромное количество систем шифрования различной степени сложности. Новый импульс этому процессу дало развитие компьютерных информационных технологий. Пересылая информацию даже в пределах компьютера, мы ее «шифруем» – переводим привычные буквы

и цифры в нули и единицы: в цепочки «таинственных символов». Компьютеры, пересылая информацию друг другу по локальным сетям или по интернету, могут использовать специальные алгоритмы шифрования для того, чтобы передаваемую информацию не мог прочесть тот, кому это не положено.

Расшифровка текста, основанная на замене символов, состоит из двух этапов – рутинного и творческого. Рутинный этап – это подсчет частоты использования тех или иных символов в исходном тексте (есть, кстати, частотный словарь языка Толстого). Герой рассказа Эдгара По сделал это вручную. Сейчас мы можем это сделать на компьютере. Несложно автоматически подсчитать в книге, которую сейчас открыл читатель на своем компьютере, число тех или иных букв русского алфавита: а – 18 338, б – 3039, в – 9494, г – 3465 и т.д. Это несложно сделать, отдав команду на поиск нужной буквы (Ctrl+F). В шифрованных сообщениях, как правило, опускаются пробелы и знаки препинания. В рассказе же Артура Конан Дойля пляшущий человечек с флажком в руке отмечал начало слова. Аббревиатуры тоже можно считать некими шифровками, раскрыть которые вне контекста событий практически невозможно.

В «Анне Карениной» Толстой описал уникальный способ шифрования текстов, ключ к которому проходит не через разум, а через сердце, через душу. Левин и Кити Щербацкая тоже через раскрытие шифра нашли самый ценный клад – свою будущую семью.

Толстой вместе с Пьером Безуховым пытался расшифровать имена Наполеона, Александра Первого – переводил буквы в числа, проводил над ними арифметические операции и анализировал ответы, в которых мерещилось число зверя и проч. *«Он написал Le Russe Besuhoff и, сочтя цифры, получил 671. Только 5 было лишних; 5 означает “e”, то самое “e”, которое было откинуто в article перед словом L'empereur. Откинув точно так же, хотя и неправильно, “e”, Пьер получил искомый ответ; L'Russe Besuhof, равное 666-ти. Открытие это взволновало его. Как, какой связью был он соединен с тем великим событием, которое было предсказано в Апокалипсисе, он не знал; но он ни на минуту не усумнился в этой связи. Его любовь к Ростовой, антихрист, нашествие Наполеона, комета, 666, l'empereur Napoléon и l'Russe Besuhof – все это вместе должно было* *созреть, разразиться и вывести его из того заколдованного, ничтожного мира московских привычек, в которых он чувствовал себя плененным, и привести его к великому подвигу и великому счастию».*

Есть такое число 1000 000 000 000 066 600 000 000 000 001 (число Бельфегора). Оно, во-первых, содержит в середине три шестерки, во-вторых, оно простое (делится без остатка только на единицу и на самое себя), а в-третьих, это число-палиндром. Имя Карениной тоже, между прочим, палиндром, если его писать со строчной, а не с прописной буквы: анна.

Цифра 6, входящая в пресловутое число зверя, кстати говоря, является первым совершенным числом (см. выше), что несколько уменьшает зловещий смысл этого числа, который приписывают ему мистически настроенные люди. Или, наоборот, увеличивает этот зловещий смысл. Ведь дьявол так совершенен! И мы позже намекнем на его совершенные вычислительные возможности.

Каренин в своем доме сидел под роковым овальным портретом Анны (см. сноску 4 на стр. 41) и читал книгу о мистических евгюбических надписях. А в это самое время, в этом городе Анна стала любовницей Вронского. Двойная мистика: портрет и шифр! Каренин пытался понять, расшифровать евгюбические надписи, но даже и не пытался понять, расшифровать душу Анны. Да и не мог!

К шифровальному делу можно также отнести проведенный Толстым синтаксический анализ оригиналов Священных Писаний. Вот выдержка из «Евангелия от Толстого (соединение, перевод и исследование четырех евангелий)»: *«Евангелия IV века писаны слитным письмом, без знаков, и потому и после IV и V веков подлежали самым разнообразным чтениям и что таких разночтений евангельских книг насчитывают до пятидесяти тысяч»* (Евангелие Толстого: избранные религиозно-философские произведения Л.Н. Толстого. М.: Новости, 1992. С. 11). Да, знак препинания, в частности запятая, может кардинально менять смысл предложения или приказания. Достаточно вспомнить классическое крылатое выражение «Казнить нельзя помиловать!». Кстати, ранние версии текстового процессора Word, вернее, его встроенного спел-чекера подчеркивали эти три слова и, либеральничая, рекомендовали пишущему поставить запятую после слова нельзя. Современный Word такого совета уже не дает. Шутники говорят, что это связано с общей тенденцией «закручивания гаек» в России: судья пишет, вернее, печатает на компьютере приговор, и не нужно ему подсказывать, где запятые ставить. Выражение «Казнить нельзя помиловать!» вполне бы могло быть коротким эпиграфом романа «Воскресение». Сейчас молодежь хорошо освоила скоропись на смартфоне только одним большим пальцем без заглавных букв. Имя и фамилию героя этой книги, напечатанные без заглавных букв, – лев толстой – спел-чекер не подчеркнет красной линией, приняв их за два отдельных понятия: вид животного (царь зверей) и прилагательное «толстая» в родительном падеже, правда, с ударением на другом месте. А вот в цитатах из Толстого и других писателей, помещенных в этой книге (они выделены курсивом), спел-чекер указывает на ошибки орфографии (красные подчеркивания) и пунктуации (зеленые подчеркивания), что связано с изменением правил грамматики и вкусовыми предпочтениями писателей. Вспомним знаменитое «однакоже» Достоевского, которое «спел-чекеры позапрошлого века» – наборщики в типографиях упорно пытались разорвать на два слова.

В настоящее время все чаще и чаще стали говорить о том, что судопроизводство могут и должны осуществлять роботы, «высочайшая математика», системы искусственного интеллигента (виноват – оговорка по Фрейду, которого Набоков называл венским шарлатаном), интеллекта. Это исключит вольные и невольные судебные ошибки, одна из которых описана Толстым в романе «Воскресение». Кстати, автор по привычке написал здесь «Воскресенье», но компьютер не переправил это слово на «Воскресение». Спел-чекер тоже нуждается в искусственном интеллекте, анализирующем контекст написанного.

И последнее в этом разделе. Столетия, века, как и главы книг – романов Льва Толстого, как правило, нумеруются римскими, а не арабскими числами. Для многих это тоже некая зашифрованная запись, если число довольно большое, больше тех, какие мы видим на циферблате некоторых часов. Вот как будут выглядеть годы жизни Льва Толстого, если их «зашифровать» римскими числами: MDCCCXXVIII – MCMX. Первый шаг в «расшифровке», в переводе в арабскую форму – это вставка пробелов: M DCCC XX VIII – M CM X. Одна из первых программ для компьютера, которую написал автор, – это перевод римских чисел в арабские и наоборот (см. главу 3 в [13, 28]).

Интересная деталь. Главы «Анны Карениной» Толстой пронумеровал римскими числами. Но только одну главу (двадцатую в пятой части романа) он озаглавил «Смерть». Потому, наверное, что тема смерти очень волновала Льва Николаевича, и мы об этом уже писали. Задание читателю – дайте краткие названия и другим главам романа и его семи частям. Неплохо было бы поместить под названием глав их краткие аннотации или ключевые слова (еще одно задание читателю). Некоторые педантичные романисты (Жюль Верн, например) так поступали, интригуя читателя, облегчая поиск в книге по оглавлению и… помогая школьникам на уроках литературы кратко рассказать о прочитанном.

Названия глав, а не только их номера, сейчас стали появляться в аудиокнигах. Это сделано для облегчения поиска. Появились мультимедийные проекты, сочетающие гладкий авторский текст, иллюстрации разных художников, аудио- и видеоряд – фрагменты из фильмов, а также комментарии. Пользователь такого, пардон, продукта имеет быстрый доступ ко всему художественному и научному наследию произведений того же Толстого, к той же «Анне Карениной».

Ранее мы упомянули, что Толстой проиграл в карты дом в Ясной Поляне, который разобрали на бревна, вывезли и собрали в другом месте. Так вот, бревна дома перед его разборкой нумеруют не арабскими, а римскими числами: I VI – шестое бревно первой стены дома и т.д. Так поступают потому, что арабские числа нельзя «написать» на бревне топором или «болгаркой».

4. СКА́ЧКИ

Но вернемся к скачкам. У одного из прямых участков Красносельского ипподрома устраивают трибуны для зрителей (у Толстого это беседка) и тотализатор[3]. Примерно такой ипподром можно видеть и в многочисленных экранизациях этого самого знаменитого «дамского» романа (см. рис. 1.1). Но Толстой по каким-то своим эстетическим, вкусовым, а не формальным причинам выбрал слово «эллипс», а не «овал» или что-то другое для описания формы Красносельского ипподрома. Художник есть художник! Но вот в кабинете Каренина *«над креслом висел овальный, в золотой раме, прекрасно сделанный знаменитым художником портрет Анны»* (см. рис. П3 в конце книги). Заметим – овальный, а не эллиптический[4]! Может быть, и вправду Красносельский ипподром был устроен в виде эллипса? Но, скорее всего, для Толстого слова «овал» и «эллипс» были некими синонимами. Вернее, так. Овал – это что-то компактное (медальон, фарфоровое блюдо [18], кабинет, портрет или зеркало на стене), а эллипс – это что-то грандиозное: беговая дорожка ипподрома, например, или орбита спутника планеты (см. раздел 8). Знал ли Толстой четкое математическое определение эллипса?! Ответить на этот вопрос нам поможет еще одна цитата из романа: *«– Самолюбия, – сказал Левин, задетый за живое словами брата, –*

[3] На красносельских скачках тотализатора, скорее всего, не было. Но зрители заключали пари, пусть хоть и несерьезные. Читаем в романе: *«– Княгиня, пари! – послышался снизу голос Степана Аркадьича, обращавшегося к Бетси. – За кого вы держите? – Мы с Анной за князя Кузовлева, – отвечала Бетси. – Я за Вронского. Пара перчаток. – Идет!»* Тотализатор без лошадей – это рулетка или азартные карточные игры. Толстой ими в свое время очень увлекался. См., например, https://www.bagira.guru/litterateur/lev-tolstoj-i-azartnye-igry.html. Так и подмывает привязать к Толстому теорию вероятностей – раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции с ними.

[4] Сразу вспоминается «готический» рассказ уже упомянутого нами Эдгара По «Овальный портрет» (“The Oval Portrait” – 1842). Бесспорно считается, что это рассказ повлиял на Оскара Уайльда с его «Портретом Дориана Грея» (“The Picture of Dorian Gray” – 1880). Вполне можно предположить, что и на Толстого он оказал влияние. Для этого достаточно перечитать рассказ Эдгара По и тот отрывок из Толстого, где упоминается овальный портрет Анны в доме Каренина. В рассказе Гоголя «Портрет» (1833–1834) также затронута мистика, но на примере не прекрасной женщины Эдгара По, а старика. Читал ли Эдгар По Гоголя?

я не понимаю. Когда бы в университете мне сказали, что другие понимают интегральное вычисление, а я не понимаю, – тут самолюбие». У Толстого, как можно судить по его биографии, были довольно сложные отношения с точными науками, в частности с математикой[5]. А Константин Левин – это alter ego Толстого. В другом романе этого великого писателя, «Война и мир», старый князь Болконский мучил свою дочь математикой (биномом Ньютона?). В этом контексте и княжну Марью тоже можно считать неким двойником Толстого, у которого, повторяем, скорее всего, были довольно сложные отношения с царицей наук.

[5] Кстати, само слово «математика», вернее, слово «математик» в «Анне Карениной» встречается всего лишь один раз – в диалоге Стивы Облонского и Константина Левина: *«– Женщина, видишь ли, это такой предмет, что сколько ты ни изучай ее, все будет совершенно новое. – Так уж лучше не изучать. – Нет. Какой-то математик сказал, что наслаждение не в открытии истины, но в искании ее»*. Что-то подобное можно сказать и о математических задачах книги – нам не важны сами ответы, важно наслаждение в поиске ответа, в связывании задачи и ее решения с творчеством самого Толстого и других писателей. Кстати, в упомянутом романе-антиутопии Замятина «Мы» слова «математика» и «математик» встречаются 25 раз. Споры Левина и Облонского коснулись и такого математического, точнее, арифметического вопроса. Облонский продавал лес, а Левин спросил его: «Счел ли ты деревья?» Облонский отвечает Левину строками из стихотворения Державина «Бог». Его стоит прочесть полностью – см. https://rupoem.ru/derzhavin/o-ty-prostranstvom.aspx. Можно предположить, что математический, вернее, некий арифметический, счетный смысл этого стихотворения волновал Толстого: *«Измерить океан глубокий, / Сочесть пески, лучи планет / Хотя и мог бы ум высокий, – / Тебе числа и меры нет!»* Мы специально добавили к ответу Облонского Левину две лишних строки, чтобы подчеркнуть смысл ответа. В книге Я. Перельмана «Живая математика» эпизод с продажей леса упоминается при описании способа расчета объема древесины в лесу, который в толстовские время измерялся саженями – кубическими саженями на десятину. Автор еще помнит московские дровяные рынки, где стояли железные мерные клети размером примерно два на два на два метра (1 на 1 на 1 сажень). В эти клети наваливали дрова перед их продажей. Жульнически наваливали или честно, аккуратно накладывали полено к полену. Сразу вспоминается эпизод из «Анны Карениной», когда крестьяне хотели обмануть Левина, сдавая ему сено в копнах с повышенной «пухлявостью». Но Левин – рачительный хозяин – не повелся на обман и заставил перемерить сено. В повести «Фальшивый купон» читаем об одном звене цепочки роковых обманов: *«Иван Миронов торговал тем, что покупал на дровяных складах одну сажень дров, развозил ее по городу и выкладывал так, что из сажени выходило пять четверок, которые он продавал за ту же цену, какую стоила четверть на дровяном дворе»*. Интересный маркетинговый прием, как бы сказали в наше время. Увы, принцип «не обманешь – не продашь!» не изжит в современной России. Это одна из причин, почему Россия никак не интегрируется в мировую цивилизацию и все время настаивает на своем особом пути, на своем суверенитете, который нужен силовикам и чиновникам, а не честным деловым людям.

Консультантом, редактором и переписчиком романа «Анна Каренина» была жена Толстого Софья Андреевна, у которой, как можно предположить, были еще более сложные отношения с математикой. Иначе бы она не пропустила эллипс, а написала бы про овальную форму дорожки ипподрома. Не про круглую, квадратную или прямоугольную, а именно про овальную!

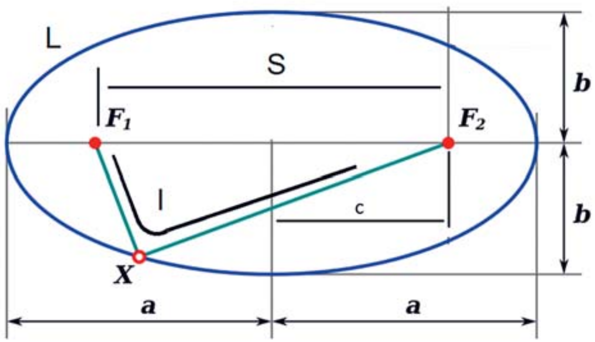
А Каренин мучил своего сына Сережу вопросами про допотопных патриархов и стихами из Евангелия. Принцип «что сам знаю, тем и достаю, мучаю своего ученика!». Сереже нужна была математика, а княжне Марье – богословие.

А вот еще одна цитата из «Анны Карениной» в подтверждение вышесказанного. *«Еще в первое время по возвращении из Москвы, когда Левин каждый раз вздрагивал и краснел, вспоминая позор отказа* <Кити приняла его “руку и сердце” только через два года посредством шифровки – см. выше>, *он говорил себе: “Так же краснел и вздрагивал я, считая все погибшим, когда получил единицу за физику и остался на втором курсе...”»* И еще оттуда же: *«...он* <Левин> *слушал и читал книгу и вспоминал весь ход своих мыслей, возбужденных чтением. Это была книга Тиндаля о теплоте. Он вспоминал свои осуждения Тиндалю за его самодовольство в ловкости производства опытов и за то, что ему недостает философского взгляда»*. Скорее всего, это была книга под названием «Популярные лекции Джона Тиндаля. Тепло и холод. Материя и сила», вышедшая в русском переводе в 1885 году. Но Толстой мог пользоваться и оригинальным текстом. Левину, пардон, Толстому хотелось добавить философии в физику, то есть вернуть ее назад в метафизику. Так часто поступают те, у кого с физикой и математикой есть проблемы. Левин, можно предположить, именно за это получил единицу по физике – не знал предмета и, как нерадивый, но несдающийся студент, «развел философию» на экзамене. Физика в нашей книге о математике упомянута неслучайно. Эти предметы тесно связаны между собой. Недаром у нас защищают диссертации по физико-математическим, а не по двум отдельным наукам. А такие фундаментальные понятия термодинамики, как энтропия и энтальпия, задаются именно через уже упомянутые интегралы.

Автору особо приятно, что Толстой в «Анне Карениной» упомянул Тиндаля. Автор теплотехник по образованию!

Но оставим пока филологическую сторону проблемы Красносельского ипподрома и займемся ее математической стороной. Проверим, как сказал поэт, алгеброй гармонию.

Допустим, что беговая дорожка[6] Красносельского ипподрома и вправду имела форму эллипса (синий овал на рис. 4.1). И оказалось это так потому, что ее размечали на огромном лугу таким простым способом: вбили в землю на расстоянии одной версты друг от друга (величина *S*) два колышка F_1 и F_2 (фокусы эллипса), привязали к ним веревку длиной l (буква эль прописная, а веревка на рис. 4.1 зеленая), натянули ее до точки *X* и прочертили таким веревочным циркулем этот самый злополучный (см. ниже) эллипс с периметром *L* (четыре версты). Эллипс – это не просто замкнутая кривая овальной формы, а геометрическое место точек на плоскости, у которых сумма расстояний до двух фокусов равна заданному значению. У нас эта сумма – искомая величина, длина веревки для разметки.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a=\frac{l}{2}$$

$$b=\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{S}{2}\right)^2}$$

Рис. 4.1. Схема задачи о Красносельском ипподроме

[6] Заметим вскользь, что у Толстого в романе описаны скачки, а не бега. Лошади скачут галопом, но бегают рысью. Поэтому дорожку правильнее назвать не беговой, а скаковой. Дети иногда бегают галопом, то есть скачут: *«Впереди всех боком, галопом, в своих натянутых чулках, махая корзинкой и шляпой Сергея Ивановича, прямо на него бежала Таня»*, – читаем мы в той же «Анне Карениной». Езда шагом, рысью или галопом, верхом или в повозке – все это вопросы оптимизации процесса перемещения на лошади в пространстве. Оптимизация же – это очень важный с прикладной точки зрения раздел математики. В русской тройке (вспомним скачки на Святки по заснеженному полю Николая Ростова, Сони, Наташи и других персонажей «Войны и мира») очень удачно используется гибридность: коренник бежит рысью, а пристяжные – галопом. А это оптимум скорости и удобства езды без рывков.

Дорожку ипподрома размечали, конечно, не с помощью веревки, а дальномером – двумя дальномерами, установленными в двух фокусах будущего «круга эллиптической формы». Можно представить, что в дальномеры смотрели два офицера и отдавали нужные команды солдату, стоящему в окрестности точки *X* (см. рис. 4.1). Так или иначе (зеленая веревочка или дальномер) ипподром в Красном селе без описанных здесь расчетов невозможно было бы построить. Напомним, что «в конце 1860-х годов русским офицером и военным инженером Василием Фомичом Петрушевским был изобретен первый в мире прибор для точного определения дистанций до цели, применявшийся в береговой артиллерии» (Википедия – статья о дальномере). Правда, в английской Википедии этот факт не отмечен: «англичанка и здесь гадит»! С другой стороны, можно вспомнить о том, что у нас во времена борьбы с «безродными космополитами» утверждали, что паровая машина, паровоз, пароход, самолет и др. были изобретены в России («Россия – родина слонов!»). Автор тогда часто думал о себе так: «Как мне несказанно повезло! Я родился в СССР, да еще и в столице, в Москве!» Но и в наше время эти «думы» не до конца потеряли своей детской наивности, несмотря на то, что автор уже в зрелые годы много чего разного узнал о своей стране и повидал (в том числе и для сравнения) практически весь мир. На это, конечно, повлиял и тот факт, что Лев Толстой – соотечественник автора.

Ремарка о злополучности красносельской беговой дорожки. Первый смысл злополучности этой дорожки мы уже затронули в дилемме «овал или эллипс». Второй же смысл не просто злополучности, а трагичности в том, что Вронский на этом «эллипсе» загубил лошадь и сам чуть не разбился. После этого потрясенная Анна признается мужу в измене... Начинается трагический период ее жизни, закончившейся на подмосковной станции Обираловка (ранее город Железнодорожный, теперь это район Балашихи). Можно предположить (вспомним сюжетные «гвозди» Дюма!), что роковое препятствие находилось на левом или правом конце эллипса (математики уточнят, что это вершины эллипса, а не его концы), где его крутизна самая большая (см. рис. 1.1, 4.1 и 6.1). Эти точки в математике так и называются – критическими, в них производные функции $y(x, a, b)$ по x стремятся к бесконечности. Лошадь Вронского Фру-Фру, можно сказать, ушла в этом месте в бесконечность… Следом за ней через три года «уйдет в бесконечность» и сама Анна. На эллипсе рис. 4.1 есть еще две особые точки – точка минимума и точка максимума. В этих точках производная функции $y(x, a, b)$ по x равна нулю. У гладкой непрерывной функции может быть еще одна точка, где производная также равна нулю, – это точка перегиба. Если говорить о гладкой и непрерывной функции не одного, а двух аргументов, то там кроме максимума и минимума есть еще одна интересная точка, которую называют седловой (рис. 4.2). В ней функция двух переменных имеет минимум по одной переменной и максимум по другой.

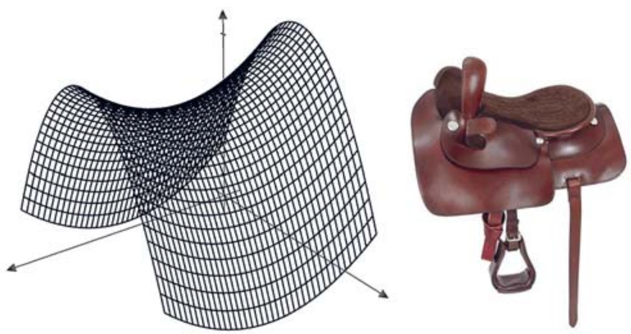


Рис. 4.2. Седловая точка на поверхности функции двух аргументов и дамское седло

С седлом, точнее, с дамским седлом связано, наверное, самое эротичное место романа Толстого. Константин Левин взглянул на такое седло, которое он отсылал для Кити по просьбе ее сестры Долли, представил себе, кто, вернее, что будет на него садиться, завыл от страстной плотской любви и уехал из дому: *«Этого уже он не мог переносить. <…> Он послал седло без ответа и с сознанием, что он сделал что-то стыдное, на другой же день, передав все опостылевшее хозяйство приказчику, уехал в дальний уезд к приятелю своему Свияжскому, около которого были прекрасные дупелиные болота…»*

Примечание редактора. Этот эпизод в романе имеет другой «официальный» смысл. Левин усмотрел унижение сестры Дарьей Александровной в более тонких материях. По его мнению, его звали в гости с седлом затем, что Кити нужно выдать замуж – теперь уже все равно за кого. Тем самым она ставилась в оскорбительную роль товара, бедняжки, которую, по словам Долли, «ужасно и ужасно жалко». Левин думал: «Я не могу просить ее быть моею женой потому только, что она не может быть женою того, кого она хотела». Возможно, однако, что Толстой вложил в этот эпизод некий ироничный эротический подтекст, который особенно виден искушенному глазу современного читателя и который заметил автор настоящей книги.

Но и у Свияжского Левина тоже мучили «эротической геометрией». Свояченицу этого друга Левина прочили ему в жены. Она для встречи с Левиным надела платье с вырезом на груди в виде трапеции (рис. 4.3) – одной из геометрических фигур в ряду эллипсов, ромбов, овалов и прочих «эротических» квадратов. Левин считал, что это было сделано намеренно, чтобы завлекать его, и очень раздражался этим.

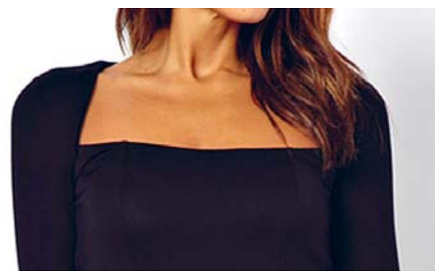


Рис. 4.3. Декольте в виде трапеции

Но вернемся к задаче о дорожке ипподрома. Нас что-то все время уводит в сторону… Автор тоже, как и Левин, считает, *«что он сделал что-то стыдное»*, поместив в книгу рис. 4.2 с довольно сомнительным поясняющим его текстом. Но математика есть математика! Даже если она слегка эротична.

Итак, какой должна быть длина зеленой веревки, привязанной концами к двум колышкам, отстоящим друг от друга на версту, чтобы длина прочерченного такой веревкой эллипса была равна четырем верстам?

На рис. 4.1 в правом углу прописано каноническое уравнение эллипса – замкнутой плоской кривой второго порядка. К таким кривым также относятся гипербола и парабола[7] (бог любит троицу – вспомним аббревиатуру SAR-НИР, упомянутую во введении). Окружность – это частный случай эллипса, когда два его фокуса находятся в одном месте. Несложно доказать, что длина большой полуоси нашего эллипса a равна половине искомой длины веревки. Для этого достаточно веревку оттянуть к правой или левой вершине эллипса. Длину же малой полуоси b также нетрудно определить, натянув веревку к верхней или нижней вершине эллипса, обозначив тем самым два прямоугольных треугольника, у которых длина гипотенузы равна половине длины веревки, а длина одного из катетов – половине межфокусного расстояния S. Это будут первые два уравнения формируемой системы с тремя неизвестными, решение которой даст ответ (см. эти уравнения под каноническим уравнением эллипса справа на рис. 4.1).

[7] К этим кривым приводит аналитическое решение физико-математической задачи небесной механики *двух небесных тел* (см. раздел 8). Другой Толстой, тоже граф и тоже писатель, – Алексей Николаевич своему роману «Гиперболоид инженера Гарина» дал неверное название. Правильное название «Параболоид инженера Гарина». Параллельный пучок света сойдется в точке, отразившись не от гиперболы, а от параболы [19]. А.Н. Толстой (а этот его роман навеян мифом об Архимеде, сжегшем вражеский флот зеркалами) отошел от физической истины из-за звучности слова «гипер» – «гипероружие». Вот и получилось, что один Толстой назвал овал эллипсом, а другой – параболу гиперболой. В литературе часто художественность берет верх над математической истиной. Кстати, гипербола – это не только плоская математическая кривая, но и художественный прием в литературе, которым Л.Н. Толстой пользовался очень скупо. Это не Гоголь с его *«шароварами шириной в Черное море»*. Антоним гиперболы в литературе – это литота, литотес. Антоним гиперболы в математике – это… эллипс. Между гиперболой и эллипсом в математике находится парабола. А что находится между гиперболой и литотой в литературе?! Сухой, стилистически не окрашенный текст? А вот и нет! Это небольшой рассказ иносказательного характера, имеющий поучительный смысл и особую форму повествования, которая движется как бы по кривой (параболе): начатый с отвлеченных предметов, рассказ постепенно приближается к главной теме, а затем вновь возвращается к началу. У Толстого есть такие детские рассказы (*«все засмеялись, а Ваня заплакал!»*). Почему такой рассказ движется по параболе, а не по гиперболе?! А потому, что гипербола (преувеличение) уже занята, а других, более сложных кривых писатели, как правило, не знают!

Многие задачи по математике, физике, химии и другим точным наукам сводятся к составлению и решению системы уравнений. Раньше такие уравнения приходилось решать вручную, что нередко требовало упрощения задачи, ввода в нее ограничений. Сейчас же это, как правило, делается на компьютере без необходимости ввода ограничений и упрощений.

На рис. 4.4 показано, как в область[8] Mathcad-расчета вводятся старые русские единицы длины – сажень и верста[9] (500 саженей). Сажень на Руси имела разную величину в разное время, пока в конце концов в петровские времена ее не привязали к семи английским футам. Это еще раз подтвердили в 1835 году николаевской метрической реформой. Запомнить просто: «Желаю вам семь футов (одну сажень) под килем[10]!» На рис. 4.4 также видно, как в расчет введена старая русская единица площади десятина.

[8] Такую область можно свернуть, щелкнув мышью по иконке с минусом. Минус превратится в плюс, а область – в горизонтальную линию, скрывающую от пользователя некоторый фрагмент расчета. Дополнительно на область можно наложить пароль. Читая романы Толстого и других классиков литературы, можно натыкаться на такие скрытые и запароленные места, раскрыть которые, найти ключ к их пониманию пытаются исследователи творчества писателей. Да и сами читатели иногда «сворачивают» некоторые места литературных произведений – пропускают их. В молодости в «Войне и мире», к примеру, интересуют любовные линии романа, с годами появляется интерес к батальным сценам, к сценам охоты, к философским изречениям…

[9] Одна верста, две версты, пять верст… Отсюда и двойное определение версты (верста и версты) на рис. 4.4.

[10] «Семь футов или одна сажень» – в этой фразе, можно сказать, сфокусировались споры западников с их футами-пардонами и славянофилов с их саженью (их споры часто упоминаются в «Анне Карениной»). Славянофильство сказалось и в первом переводе на русский язык са́мого знаменитого романа Флобера, который часто ассоциируют с «Анной Карениной». Его название было «Госпожа Бовари», а не «Мадам Бовари». Этот роман, бесспорно, повлиял на создание Толстым «Анны Карениной». Так и хочется из озорства перемешать названия этих двух великих романов – «Эмма Бовари» и «Госпожа Каренина». Вронский после гибели Анны в пылу славянофильства уезжает «решать восточный вопрос» – спасать братьев-славян, находящихся под османским игом. Нетрудно предсказать судьбу этого «паркетного офицера», дослужившегося до полковника, но не имевшего никакого боевого опыта (даже скакать на лошади он толком не умел – сломал ей хребет). По крайней мере, Толстой об этом ничего не пишет. Скорее всего, Вронский при первом боестолкновении с турками погибнет сам и загубит своих солдат, совершив наконец-то акт суицида. Солдат только жалко. Но бабы нарожают новых солдат, а барыни – новых офицеров. На это в основном опиралась царская военная тактика, оперативное искусство и стратегия.

Она нам пригодится, когда мы будем подсчитывать площадь, которую охватывает беговая дорожка Красносельского ипподрома. Десятина очень часто упоминается в «Анне Карениной» и в контексте сельхозработ Левина, и вообще при описании сложных земельных отношений в послереформенной России, когда крестьян освободили от крепостной зависимости, но фактически не дали им земли. Тот же Константин Левин, имея «три тысячи десятин в Каразинском уезде», считал, что это несправедливо, и думал, как исправить это ненормальное положение вещей. Эту тему Толстой продолжил с другим богатым землевладельцем – с Дмитрием Нехлюдовым из «Воскресения».

$$\textit{сажень} := 7\ ft = 2.134\ m \qquad \textit{верста} := 500\ \textit{сажень} = 1066.8\ m \qquad \textit{версты} := \textit{верста}$$

$$\textit{десятина} := 2400 \cdot \textit{сажень}^2 = 1.093\ hectare$$

Рис. 4.4. Ввод в расчет пользовательских единиц измерения

Как видно из рис. 4.4, верста равна примерно одному километру, а десятина – примерно одному гектару. Когда в России переходили к десятичной системе мер и весов, то была идея издать романы Толстого с современными единицами измерений, чтобы читатель легче понимал количественные оценки и забыл наконец-то про старые единицы («отречемся от старого мира!»). Но тогда бы дух романов несколько исказился[11]. В одном переводе «Анны Карениной» на английский язык четыре версты Красносельского ипподрома заменили на три мили: *"The race course was a large three-mile ring of the form of an ellipse..."* (перевод Constance Garnett). Но эллипс оставили! Правильнее было бы в английском переводе указать, что дорожка была длинной четыре километра и... овальной формы. Но здесь опять же превалировали некие эстетические и исторические причины над физико-математическими. Еще один пример – «Двадцать тысяч лье под водой» Жюль Верна, где не вставили километры, а оставили старинные единицы длины. Кстати, о переводах. Читаем в «Войне и мире»: *«– Ну, сударыня, – начал старик, пригнувшись близко к дочери <...>, треугольники эти подобны; изволишь видеть, угол abc...»* В английском варианте романа эти треугольники стали не подобными (similar), а равными (equal). Кажется, что это мелочь, но... Кто из нас сходу вспомнит школьную геометрическую классику: три признака подобия и три признака равенства треугольников?! Старый Болконский кончил этот урок математики с княжной Марьей такими словами: *«– Ну, как же не дура! – крикнул князь, оттолкнув тетрадь...»* Что-то подобное можно сказать и про этого переводчика (переводчицу!). Он (она), может быть, хорошо знал (знала) и русский, и английский язык, но плохо знал (знала) элементарную математику, раз перепутал (перепутала) подобие и равенство. Тем более что подобие в жизни и в математике встречается намного чаще, чем равенство.

На рис. 4.5 можно увидеть размер сажени: вбили первый колышек на будущем ипподроме, отмахали деревянным треугольником (саженью) 500 раз и вбили второй колышек. Потом этой же саженью проверили длину будущей беговой дорожки ипподрома, размеченной с помощью зеленой веревки, длину которой мы сейчас найдем. На рис. 4.5, кстати, можно видеть и фут – шаг мужчины: семь шагов – вот вам примерно и сажень! На ум приходят и сказочные семимильные шаги, где просматривается и филология (синоним этого выражения – очень быстро), и метрология – на Руси в прошлом тоже использовались мили, состоящие из семи верст. А вот в таком отрывке из «Анны Карениной»: *«Левин соскочил с катков, на которые он уже сел было, к рядчику-плотнику, с саженью шедшему к крыльцу»*, – фигурирует уже другая сажень – длинная плотницкая деревянная линейка, расчерченная на аршины и вершки.

[11] Новая редакция романа вышла с новой орфографией, в частности без твердых знаков в конце почти половины слов. Вот тогда-то и можно было заодно заменить версты километрами, а десятины – гектарами. Но этого не сделали, а сейчас делать уже поздно. Да и не нужно. Другой пример. По идее, роман Рэя Брэдбери "Fahrenheit 451" в русском переводе должен был выйти под названием «233 градуса по Цельсию». Но оставили британские единицы температуры. Почему? Здесь тоже можно привести много доводов за и против. Еще сложнее ситуация с деньгами. *«Старый Джолион вышел из кареты и, расплачиваясь с кэбменом, в первый раз в жизни дал по ошибке соверен вместо шиллинга»*, – читаем мы в уже упомянутом романе Джона Голсуорси. Но нас не интересует перевод номинала этих монет в рубли и копейки – интересно, какова была переплата, насколько бережливый старый Форсайт был потрясен встречей с семьей сына-изгоя.

Рис. 4.5. Русская крестьянка отмеривает землю саженью

На рис. 4.6 показано решение задачи в среде Mathcad через поиск корня системы трех уравнений. Два их них мы уже описали (см. рис. 4.1). Третье же включает в себя определенный интеграл, по которому рассчитывается длина дуги полуэллипса. Вот оно, это самое интегральное исчисление, с которым у Толстого-Левина были до того сложные отношения, что о них даже упомянуто в романе! У нас система не просто уравнений, а интегро-алгебраических уравнений – неизвестная величина *a* «сидит» и в пределах интеграла, и в подынтегральном выражении! Во времена Толстого это была очень сложная и для многих почти неразрешимая задача.

Встроенная в Mathcad функция Find меняет численные значения своих аргументов (неизвестных системы), отталкиваясь от предположения, заданного пользователем, так, чтобы уравнения превратились в тождества. Вот что можно прочесть про уравнения и тождества в «Исповеди» Толстого: *«Было что-то подобное тому, что бывает в математике, когда, думая решать уравнение, решаешь тождество. Ход размышления правилен, но в результате получается ответ: a = a, или x = x, или 0 = 0. То же самое случилось и с моим рассуждением по отношению к вопросу о значении моей жизни. Ответы, даваемые всей наукой на этот вопрос, – только*

$S := 1$ **верста**

$L := 4$ **версты**

$$y(x,a,b) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{solve,\,y} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{-(a^2 \cdot b^2 \cdot x^2) + a^4 \cdot b^2}}{a^2} \\ \dfrac{-\sqrt{-(a^2 \cdot b^2 \cdot x^2) + a^4 \cdot b^2}}{a^2} \end{bmatrix}$$

Решить

Предположение

$b := 1$ **km** $\quad l := \frac{L}{2} \quad a := \frac{l}{2}$

Ограничения

$$a = \frac{l}{2} \quad b = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2} \quad L = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1^2 + \left(\frac{d}{dx} y(x,a,b)_0\right)^2}\, dx$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ l \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(a,b,\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} 0.732 \\ 0.534 \\ 1.463 \end{bmatrix} \textbf{ верста}$$

Проверка правильности решения

$a = 780.399369664573$ **m** $\quad \frac{l}{2} = 780.399369664573$ **m**

$b = 569.655699675569$ **m** $\quad \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2} = 569.655699675569$ **m**

$L = 4$ **верста** $\quad 2 \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{1^2 + \left(\frac{d}{dx} y(x,a,b)\right)^2}\, dx = 4.0000000000003$ **верста**

Рис. 4.6. Решение задачи о Красносельском ипподроме *тождества»*. Но мы все же на рис. 4.6 решали не тождества, а уравнения. Внизу рисунка проверка показывает, что два первых уравнения превратились строго в тождества (с учетом числа значащих цифр в ответе), а третье – в примерно тождество (последняя цифра ответа – тройка, а не нуль). У Толстого мы тоже видим два тождества ($a = a$ и $x = x$), а про третье можно предположить, что это примерное тождество (0,0000000 = 0,0000001; 0,0 = 0,1 или даже 0 = 1). Вопросы, задаваемые нам наукой о значении нашей жизни, – это тождества с разной степенью точности. В том числе и с очень грубой точностью 0 = 1. Автор надеется, что Толстой согласился бы с этим утверждением.

Вверху на рис. 4.6 показано, как аналитически решается каноническое уравнение эллипса с генерацией функции пользователя $y(x, a, b)$ с аргументом x и двумя параметрами a и b. Уравнение имеет два корня – получается функция-вектор с двумя элементами, описывающими верхнюю и нижнюю половинки эллипса. Под интегралом в третьем уравнении может фигурировать любой элемент этой функции-вектора. У нас там записан нулевой элемент вектора – см. индекс 0 у производной функции под квадратным корнем. Там же под интегралом присутствует и уже упомянутая теорема Пифагора. Чтобы она была более заметна, единицу (первый катет) автор возвел в квадрат. Это как в литературе – в повествование вставляется описание чего-либо или кого-либо, которое никак не влияет на сюжет, но позволяет глубже задуматься о нем, понять его… Второй катет задает производная функции.

Задача решена! Чтобы очертить четырехверстовый эллипс беговой дорожки Красносельского ипподрома, нужно взять веревку длиной 1,463 версты (одна верста и 232 сажени, или 1561 метр). Функция Find вернула нам также значения длин полуосей эллипса a и b, знание которых позволит нарисовать на графике сам эллипс – см. рис. 6.1.

5. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Всем хорош пакет Mathcad, но у него есть один недостаток – это платный программный продукт[12]. Но существует и бесплатная облегченная версия пакета под названием Mathcad Express[13]. В ней функция Find (решение системы уравнений – см. рис. 4.6) заглушена, но работает функция root (поиск нуля функции). На рис. 5.1 показано, как эта функция позволила решить несколько измененную задачу о красносельском эллипсе, где задано не расстояние между фокусами, а такое «красивое» дополнительное условие: у нас эллипс не простой, а золотой (яичко не простое, а золотое!) – большая a и малая b полуоси эллипса соотносятся друг с другом по правилу *золотого сечения*: короткий отрезок относится к длинному, как длинный отрезок относится к сумме отрезков.

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b} \xrightarrow{solve,\,b} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{5\cdot a^2}-a}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{5\cdot a^2}-a}{2}\end{bmatrix}$$

$$a_1 := 0.5\ km \qquad a_2 := 1\ km$$

$$a := \mathbf{root}\left(2\int_{-a}^{a}\sqrt{1^2+\left(\frac{d}{dx}y\left(x,a,\frac{\sqrt{5\cdot a^2}-a}{2}\right)\right)^2}\,dx - L, a, a_1, a_2\right) = 0.828\ km$$

$$b := \frac{\sqrt{5\cdot a^2}-a}{2} = 0.512\ km \qquad l := 2\,a = 1655.791\ m$$

Рис. 5.1. Решение задачи о «золотом» Красносельском ипподроме через поиск нуля функции на отрезке

12 Переводя этот тезис с маркетинга программных продуктов в русло литературы, можно отметить, что все книги, как и программы, делятся на два разряда. По одним литературным произведениям действуют права автора или его наследников, а по другим действие этих прав уже закончилось и издатели могут выпускать книги без выплаты гонораров. У Толстого в этом отношении был конфликт с женой и детьми. Лев Николаевич в конце своей жизни отказался от авторских прав на свои произведения, что не очень понравилось Софье Андреевне и некоторым их детям.

13 Человек скачивает с сайта ptc.com полную версию Mathcad, работает с ней месяц, а потом она становится урезанной, если не куплена лицензия на полную версию. Литературная аналогия: человек может скачать из интернета несколько глав книги бесплатно, а потом купить ее полную версию, если книга понравилась.

На рис. 5.1 первым оператором решается уравнение золотого сечения[14]: отношение малой полуоси эллипса b к большой полуоси a равно отношению большой полуоси a к сумме длин полуосей $a + b$. Далее численно ищется нуль (root) функции, полученной из уравнения длины эллипса, но с опорой не на начальное предположение (см. рис. 4.6), а на края отрезка от 500 метров до одного километра (там находится искомый нуль – значение аргумента функции, при котором функция равна нулю). Используется метод половинного деления на отрезке $a_1 - a_2$. Для прочерчивания не простого, а «золотого» эллипса ипподрома веревка понадобится подлиннее, не 1561, а 1656 метров.

Как поймать льва в пустыне и посадить его в клетку? Ловля льва методом дихотомии основана на последовательном делении пустыни на две части. Вначале мы огораживаем пустыню по периметру железной загородкой (задаем интервал, где находится нуль функции, – см. рис. 5.1), далее разгораживаем пустыню еще одной железной загородкой пополам и отбрасываем ту часть пустыни, где льва нет. Повторяем процедуру деления пустыни загородкой пополам, пока лев не окажется в клетке… зоопарка, – вспомним рассказ Толстого «Лев и собачка»: «В Лондоне показывали диких зверей и за смотренье брали деньгами или собаками и кошками на корм диким зверям. Одному человеку захотелось поглядеть зверей: он ухватил на улице собачонку и принес ее в зверинец. Его пустили смотреть, а собачонку взяли и бросили в клетку ко льву на съеденье». Сейчас такие рассказы маркируют знаком 18+ (хоррор).

[14] Символьная математика также отключена в пакете Mathcad Express. Но это уравнение несложно решить и вручную. Можно также воспользоваться популярным у школьников и студентов порталом www.wolframalpha.com. А лучше поступить так: решить уравнение вручную (математика – отличная гимнастика для ума!), а затем сделать компьютерную проверку решения! Толстовский Левин занимался «гимнастикой для рук» – поднимал «одною рукой пять пудов». А его гимнастика для ума – это рассуждения о смысле жизни. Кстати, при больших физических нагрузках активизируется и мозг. Так что можно совместить эти два вида гимнастики. А Толстой занимался еще и духовной гимнастикой, если так можно выразиться. В особенности на старости лет, когда первыми двумя видами гимнастики заниматься стало весьма затруднительно.

6. СЕРЕБРЯНОЕ СЕЧЕНИЕ

Конец жизни Льва Толстого пришелся на стык золотого и серебряного веков русской литературы. Это дает нам повод сделать еще одну «ювелирную» математическую выкладку, касающуюся Красносельского ипподрома. Ювелирную и в смысле упоминания драгметаллов, и в смысле точности выполнения.

Серебряное сечение в математике и искусстве менее известно, чем золотое сечение. В литературе же, наоборот, о серебряном веке знают многие, а о золотом – нет. Да и сам термин «золотой век русской литературы» довольно неустоявшийся. О серебряном сечении мало кто знает из-за того, что его формулу труднее запомнить и выразить словами[15]. Тем не менее форму серебряного Красносельского ипподрома определить несложно по методике, зафиксированной на рис. 5.1.

На рис. 6.1 показаны найденные формы трех эллипсов с формулами для золотого (справа вверху) и серебряного (центр) сечений. Третий эллипс – это тот, у которого отношение периметра к межфокусному расстоянию равно четырем (исходная одноверстовая задача). У золотого эллипса межфокусное расстояние увеличилось с версты (начальная задача) на 235 метров (110 саженей), а у серебряного – на 609 метров (295 саженей). Площади эллипсов оказались такими: 128, 122 и 101 десятина. Периметры же этих эллипсов одинаковы – четыре версты. Но нас интересуют не конкретные численные значения, а формы этих эллипсов. Какой из них более изящный, более подходящий для ипподрома, для рамы картины или для зеркала («Лев Толстой как зеркало русской революции», а зеркало это эллиптическое!). Или для контура медальона, если рис. 6.1 повернуть на 90 градусов. Двойку

[15] Автор, к своему стыду, должен признаться, что он узнал об этом сечении только тогда, когда писал эту книгу и затронул серебряный век русской поэзии и культуры в целом. Если в формуле для золотого сечения «сидит» квадратный корень из пяти (см. рис. 4.1), то в серебряном сечении – из двух (см. рис. 6.1). Корень же из двух относит нас к античным временам – к ранним достижениям математики, когда было доказано, что это иррациональное число. Настоящая поэзия иррациональна! Это число всплывает, когда высчитывают длину диагонали квадрата – квадратного участка земли. Земельный вопрос стоял остро не только во времена Толстого!

перед переменной *a* в формуле серебряного сечения (см. центр рис. 6.1) можно менять на другое число и вырисовывать эллипсы, максимально отвечающие нашему представлению об изящных пропорциях… Многие полагают, что серебряное сечение и изящнее, и, если так можно сказать, математичнее еще и потому, что в него запрятан квадратный корень из двух, а не квадратный корень пяти, как в золотом сечении. Но мнение это спорное, и мы ниже это постараемся доказать.

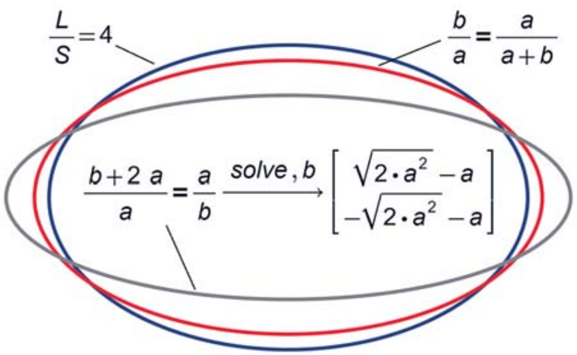


Рис. 6.1. Графическая иллюстрация решения трех вариантов задачи о Красносельском ипподроме

Золотое сечение имеет аналогию с числами Фибоначчи (0, 1, 1, 2, 3, 5 …), которые связаны с золотым сечением прямым уравнением $q^2 = q + 1$ и рекуррентным уравнением $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (новое число – это сумма двух предыдущих).

Числа Фибоначчи по формулам Бине представляются в виде суммы двух геометрических прогрессий со знаменателями – корнями уравнения $q^2 = q + 1$. Кстати, прямую формулу общего члена чисел Фибоначчи искали около 500 лет. Дольше, чем решали проблему Ферма, которую мы упоминали выше.

Для серебряного сечения имеем такое уравнение $q^2 = 2q + 1$ и рекуррентное уравнение $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Здесь аналогом чисел Фибоначчи будет последовательность (0, 1, 2, 5, 12, …). Несложно также получить аналог формул Бине для серебряного сечения (задание читателю-математику).

Последние годы жизни и творчества Льва Николаевича Толстого (1828[16] – 2010) – это, повторяем, конец золотого и начало серебряного века русской литературы и искусства.

Золотую, серебряную или иную пропорцию[17] можно приложить к довольно спорной и политизированной теме – к соотношению идейности и художественности произведений литературы и искусства, о чем много спорили во времена Толстого и спорят сейчас. Эта тема основательно затронута в лекциях Набокова по литературе (http://nabokov-lit.ru/nabokov/kritika-nabokova/lekcii-po-russkoj-literature/index.htm). Подобно Толстому, Набоков мог бы вывести такую «дробную» формулу: *«Книга подобна дроби, числитель есть ее художественность, а знаменатель – ее идейность. Чем больше знаменатель, тем меньше дробь».*

В интернете можно наткнуться на многочисленные продолжения романа «Анна Каренина» под названиями «Ани Каренина», «Нюша Каренина», в которых, как правило, ноль художественности и очень много «идейности». В этих «сочинениях» описывается дальнейшая судьба Вронского, Сережи Каренина и Ани – незаконнорожденной дочки Карениной и Вронского. Одно из таких продолжений описывает, как Ани росла-росла, пережила три русские революции, гражданскую войну и превратилась в… булгаковскую Аннушку, разлившую подсолнечное масло на трамвайных путях. В другом продолжении романа Ани – это будущая (Ф)анни Каплан, вошедшая в историю покушением на второго знаменитого недоучившегося казанского юриста (см. сноску 2 на стр. 15). А вот что интересно, пытался ли сам Толстой написать продолжение «Анны Карениной»? Есть намеки на то, что он хотел это сделать, но в итоге сжег рукопись по примеру Гоголя. Толстой посчитал, что там будет уж слишком много идейности и мало художественности. Толстой думал

[16] В дате рождения Толстого, как известно, скрыта не просто математика, а высшая математика, математический анализ. Число *e* (основание натурального логарифма, число Эйлера (или число Непера, как его называют в некоторых странах – в Италии, например)) можно запомнить с довольно высокой точностью так: 2,7 (это знают все) плюс два раза год рождения Льва Николаевича – 2,718281828. Знал ли о такой интерпретации числа *e* сам Толстой, который отметил число 28 в дате своего рождения?

[17] А есть и сверхзолотое сечение – действительный корень уравнения $x^3 = x^2 + 1$. Можно придумать и некое *бронзовое сечение*. Бронзовый век отечественной литературы и искусства – это то, что последовало за золотым и серебряным веками? Некоторые советские писатели стали «бронзоветь», провозглашать себя чуть ли не прижизненными классиками… Или можно сказать так, позитивнее: бронзовый век русской и мировой литературы начался тогда, когда стали ставить памятники не только монархам и полководцам, но и великим писателям.

и о продолжении «Войны и мира». В так и не написанном романе «Декабристы» сын Андрея Болконского Николай становился молодым декабристом, взошедшим на эшафот, а Пьер Безухов – старым декабристом, сосланным в Сибирь. За ним на каторгу поехала бы и его жена Наташа, урожденная Ростова. Николай же Ростов, брат Наташи, отдавал команды на расстрел мятежных войск, собравшихся на Сенатской площади Петербурга в декабре 1825 года.

А вот как автор со своими студентами пришли к золотому сечению не через математику, а через индивидуальное ощущение прекрасного.

Студентов попросили открыть на компьютере графический редактор Paint и нарисовать в нем протяжкой мыши прямоугольник с такой пропорцией сторон, какая кажется им наиболее красивой, наиболее совершенной. Можно было, конечно, в духе данной книги попросить нарисовать не прямоугольники, а эллипсы, но их размеры фиксировать труднее. Высоту и ширину нарисованного прямоугольника в пикселах нужно было сообщить одному студенту, отвечавшему за статистическую обработку данных. Вот что получилось (рис. 6.2–6.4).

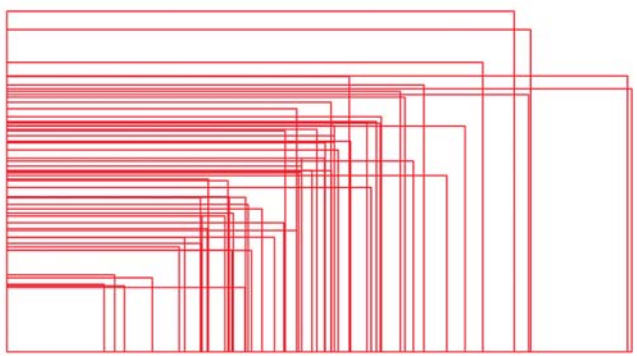


Рис. 6.2. Студенческие «красивые» прямоугольники

На рис. 6.2 показаны исходные студенческие прямоугольники. Примерно треть прямоугольников оказались «стоячими» (высота прямоугольника больше его ширины), а остальные – «лежачими». Было решено сделать их все лежачими. Кстати, среди подопытных студентов были и китайцы. Они-то в основном и рисовали «стоячие» прямоугольники. Связано ли это с традиционным китайским

письмом сверху вниз, а не слева направо – вопрос, требующий отдельного исследования.

Ширина (вектор X) и высота (Y) студенческих прямоугольников отображены точками на графике рис. 6.3. Там же проведены две наклонные прямые линии. Первая (красная) – это линия золотой пропорции $0{,}618x$, а вторая (тоже красная) – среднее арифметическое (mean) от результатов деления элементов вектора Y (высоты студенческих прямоугольников) на элементы вектора X (ширины прямоугольников). Вы не поверите и будете смеяться, но две эти прямые практические совпали – прямая среднего арифметического имеет формулу $0{,}619x$, что с избытком вписывается в теорию погрешностей. Вот какой совершенный художественный вкус имеют студенты автора! Они рисовали разные прямоугольники (см. рис. 6.2), но их «средний» прямоугольник оказался золотым (рис. 6.3).

Рис. 6.3. Статистика по студентам и золотое сечение

Кстати, если точки на рис. 6.3 статистически обрабатывать не «грубым, пошлым» и всем известным (кроме гуманитариев) методом наименьших квадратов, задействовав Mathcad-функцию line, а более «интеллигентным, утонченным, поэтичным», известным только избранным методом медиан-медианной регрессии (функция medfit), то мы получим еще одну, третью прямую линию, которая тоже практически совпадет с «золотой» прямой линией (рис. 6.4). Линейная же регрессия методом наименьших квадратов даст прямую, существенно отличающуюся от «золотой». Короче, «есть ложь, наглая ложь и… статистика!» [11].

Рис. 6.4. Регрессионный анализ художественных предпочтений студентов

Результаты статистической проверки художественного вкуса студентов вполне предсказуемы. Многие из них видели в музеях картины в рамах, отношения сторон которых близки к золотой пропорции. Золотое сечение повсеместно окружает человека – в архитектуре, например. Многие видят его и в музыке. Есть численные методы решения задач, где также присутствует золотое сечение. Что далеко ходить – пропорции обычных неширокоформатных мониторов компьютеров, дисплеев планшетов (но не смартфонов) близки к золотым. Экран ноутбука, на котором писался этот текст, имел размеры 207 на 332 мм. Отношение этих чисел (0.6235) близко к золотому (0.618). Все это не могло не повлиять на процесс рисования студентами прямоугольников. Было бы интересно провести эксперимент с прямоугольниками или овалами-эллипсами среди людей, не видевших никаких живописных полотен, – с дикарями Амазонии, например. Такой опыт в чем-то будет подобен другому схожему «языковедческому» опыту: ребенку с самого рождения не давали слушать человеческую речь, ожидая, на каком языке он в конце концов заговорит. Опыт, конечно, наивный и бесчеловечный, но имевший место. Так пытались узнать, какой язык является главным, базовым языком человеческого общения.

7. СЕРЕБРЯНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ДВУХ

При написании текста книги с клавиатуры автор по привычке вводил прилагательные *серебрянный*, которые компьютер упорно подчеркивал красной волнистой чертой, призывая человека исправить грамматическую ошибку – *серебряный*, а не *серебрянный*. Почему в этом слове одна буква «н», а в большинстве ему подобных две?! Да и в слове *посеребрённый* тоже две буквы «н»!

А вот подобный вопрос по математике. Почему везде в справочниках написано, что синус 45 градусов (π/4 радиан) равен *квадратному корню из двух, поделенному на два*, а не более простому выражению. Можно быть абсолютно уверенным в том, что и княжну Марью, и Левина, и самого Толстого мучили не только исключениями в русском языке (стеклянный, оловянный, деревянный, но серебряный; цыц, цыган, на цыпочках, цыпленок и проч.), но и таблицами синусов, косинусов, тангенсов. Никого не обошла «сия чаша»!

С языком все более-менее ясно – там «почему?» спрашивать не нужно, а надо просто тупо заучивать правила. Во времена Толстого гимназистов мучили еще и ятями в словах, и буквами и/і. Многие ли из нас, читая «Войну и мир», задумывались о дореформенном написании слова «мир» в названии романа – «миръ» или «міръ». Толстой в названии этого романа-эпопеи упоминал мир, как состояние, противоположное войне, – міръ, а не какую-то общность людей или других существ (деревенская община, мир животных и др.). В советское время в разгар холодной войны был популярен лозунг «Миру – мир!». Букву «і», а не «и» из русского языка убрали по сугубо статистическим причинам – первая в старых русских текстах встречалась примерно в десять раз реже второй. Автор это очень быстро проверил, открыв на компьютере текст романа в старинной орфографии (см. также «Орфографию» Дмитрия Быкова, http://lib.ru/POEZIQ/BYKOW_D/orfografiq.txt). А зря люди так поступили! Нужно было оставить букву «і». Тогда русские тексты были бы ближе к «заграничным». Кстати, на украинском языке пишут «Війна і мир» – «Вийна и мыр», – сразу вспоминается булгаковский «кот-кит-кыт» из «Белой гвардии».

В математике же надуманных правил и исключений из правил нет, но эти самые «почему» остаются. Вернемся к синусу 45 градусов. Если в прямоугольном равнобедренном треугольнике катеты равны единице, то гипотенуза этого треугольника, согласно всем известной теореме Пифагора, будет равна квадратному корню из двух. Синус же – это отношение противолежащего катета к гипотенузе. Отсюда истекает закономерный вывод о том, что синус и косинус 45 градусов равны *единице, деленной на корень из двух*. Почему же тогда во всех справочниках, головах математиков и простых смертных «сидит» более сложная формула – *квадратный корень из двух, деленный на два*?!

Кстати, об углах равнобедренного прямоугольного треугольника. Его углы (45-90-45) записаны в числе *e* (основание натурального логарифма, число Эйлера) сразу за двойным годом рождения Льва Толстого: $e = 2{,}718281828459045$.

А дело в том, что люди как черт ладана боятся деления на иррациональные числа, на корень из двух например. Эта операция намного сложнее, чем умножение на иррациональные числа, если говорить про ручные расчеты и преобразования! Но компьютеры не боятся такого «ладана», а мы сейчас считаем сугубо на компьютерах. Так что исключения, связанные с некой традицией, есть не только в языке, но и в математике.

Исключения, как полагают многие, придуманы для того, чтобы отличить грамотного человека от малограмотного. Возвращаясь к нашей задаче о Красносельском ипподроме, можно утверждать, что выражение «эллиптический интеграл» – это некий тест на знание математики. Слабо знающие этот предмет не понимают, почему этот интеграл так называется. В справочниках же нередко приводится только вид подынтегрального выражения с квадратным корнем и говорится, что такой интеграл называется эллиптическим. А почему он эллиптический? Лев Николаевич Толстой со своим «гипподромом» помог нам лишний раз разобраться в этом математическом вопросе!

С квадратным корнем из двух мы еще встретимся, когда будем описывать *овал* (*эллипс*) *Толстого*.

8. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Любовные треугольники, описанные в романе «Анна Каренина», ассоциируются с так пока и не решенной аналитически уже нами упомянутой задачей небесной механики – задачей о трех небесных телах, где также используется интегральное исчисление, так волновавшее Левина-Толстого. Но эта знаменитая проблема, получившая широкую известность стараниями Анри Пуанкаре (1854–1912), упоминается Толстым в контексте отношений между людьми только в третьем по счету и последнем романе Толстого – «Воскресение»: *«– Ну, что проблема трех тел? – прошептал еще Крыльцов и трудно, тяжело улыбнулся. – Мудреное решение? Нехлюдов не понял, но Марья Павловна объяснила ему, что это знаменитая математическая проблема определения отношения трех тел: солнца, луны и земли, и что Крыльцов шутя придумал это сравнение с отношением Нехлюдова, Катюши и Симонсона. Крыльцов кивнул головой в знак того, что Марья Павловна верно объяснила его шутку»*.

Проблема двух небесных тел (Солнца и Земли, Земли и Луны – у Толстого они прописаны маленькими, строчными буквами) имеет общее аналитическое решение. Два небесных тела вращаются относительно друг друга по так называемым коническим траекториям. Почему коническим? Если круговой конус рассечь плоскостью, то в сечении мы можем получить эллипс (окружность в частном случае), параболу или гиперболу. Подробнее мы этого коснемся в конце данного раздела книги, когда будем моделировать полет кометы.

Проблема же трех небесных тел не имеет общего аналитического решения, которое можно свести к сочетанию простых аналитических функций и арифметических действий. Есть решения только для некоторых частных случаев. Численные же решения, о которых во времена Толстого мало чего было известно даже математикам и астрономам, в докомпьютерную эру были очень трудоемкими и давали весьма приближенные результаты.

Но трем небесным телам самое, казалось бы, место не в третьем, а во втором романе Толстого – не в «Воскресении», а в «Анне Карениной». Эта задача, повторяем, в общем виде худо-бедно (см. ниже) решается численно, но есть и аналитические решения для некоторых частных случаев [14]. А подобные «частные случаи» и описаны в «Анне Карениной»: Вронский «вертелся» около Кити, но потом перешел на орбиту Анны; женатый Стива имел роман с гувернанткой; старший брат Вронского, имея семью, содержал танцовщицу; у князя Чеченского (петербургский приятель Облонского) были две семьи и, наконец, Анна в одном из своих кошмарных снов одновременно «гуляет» (см. сноску 23 на стр. 156) со своими спутниками, с двумя Алексеями – с «законным» Алексеем Александровичем и «беззаконным» Алексеем Кирилловичем.

Два попутных замечания.

В романе «Анна Каренина» много вещих, пророческих снов. Так и подмывает пронумеровать их: первый сон Веры Павловны, пардон, Анны Аркадьевны, второй сон Анны Аркадьевны и т.д. Забегая вперед, в золотое, серебряное, бронзовое и толстовское определение совершенных пропорций в науке, искусстве (литературе) и в религии, можно отметить, что роман Чернышевского «Что делать?» был интересным фоном романов Толстого. В романе Чернышевского превалировала идейность над художественностью. Есть легенда, что Менделееву во сне явилась периодическая таблица его имени. А кто подсчитал, сколько математиков увидели доказательства теорем во сне или в полудреме?! Сколько сюжетов будущих своих рассказов, повестей и романов писатели увидели в своих снах?!

Литературные критики не перестают спорить о том, почему Толстой дал Вронскому и Каренину одинаковые имена[18]. В математике это невозможно: представьте себе формулу, где переменная

[18] Многие недоумевают, почему Достоевский дал главному герою романа «Идиот» имя Лев Николаевич. Правда, сделал его не графом, а князем. Сам же Лев Николаевич (не Мышкин, а Толстой), подобно Чехову, любившему врачей, любил… графов: у Толстого почти все более-менее приятные титулованные персонажи – это графы и графини (графинюшки), а все не совсем приятные – князья. Наташа Ростова чуть не стала княгиней, но в конце концов осталась графиней, поменяв только фамилию на Безухову. Княжна Китти Облонская потеряла свой княжеский титул, став просто мадам Левиной, что очень огорчило ее мать. Математическая великомученица княжна Марья стала графиней Ростовой и т.д. Своего любимого Пьера Толстой сделал графом и дал ему в придачу огромное состояние. Князем был Нехлюдов – довольно мерзкая личность. А вот нетитулованный Пушкин не любил графов и прочих князей. Один из самых известных титулованных литературных героев – это граф Нулин, «граф Ничтожество».

с одним именем в одном месте означает одно, а в другом – другое. Хотя в среде математического пакета Mathcad такое возможно. Переменная m в одном месте расчета – это, например, масса какого-то объекта, а в другом – единица длины, метр (см. рис. 8.9, например, где их различают по цвету). В романе Толстого две «главные переменные» с именем Алексей (муж и любовник Анны) различаются отчествами («цветом»). Зачем дочку Анны Толстой назвал тоже Анной (Ани)?! Зачем Толстой, как бы пародируя самого себя, ввел в роман «Анна Каренина» персонажа, прибывшего из-за границы, которому при последующем усыновлении дали имя графа Безухова, виноват, графа Беззубова. А в пьесе Толстого «Живой труп» Анна Каренина – одно из действующих лиц. Правда, не Аркадьевна, а Дмитриевна. Примерно такая же коллизия наблюдается и в литературе в целом. Есть три писателя по фамилии Толстой. Если не указано имя, то по умолчанию имеют в виду нашего Льва Николаевича. Если же указывают имя Алексей, то нужно добавить и отчество – Николаевич («красный граф») или Константинович. С Дюма примерно такая же история. Александров Дюма двое. Первого с его «историческими гвоздями» мы упомянули в начале книги – это Дюма-отец. А есть еще и Дюма-сын с пошлейшими «камелиями». Можно упомянуть и третьего Дюма – Тома-Александра (деда – см. роман Андре Моруа «Три Дюма», http://lib.ru/MORUA/duma.txt). Имя-отчество (бренд) Лев Николаевич в настоящее время как-то не принято давать людям и литературным персонажам. Умный и образованный отец с именем Николай остережется давать имя Лев своему сыну. Это как в математике. В формулах переменная с именем π может означать только одно – отношение длины окружности к ее диаметру, и ничего другого.

На рис. 8.1 показаны авторские кадры анимации численного (не аналитического) решения такой частной задачи о трех небесных телах [14]. Слева летит красная планета с синим спутником на эллиптической орбите. Вернее так: орбита будет и по внешнему виду эллиптической, если за центр координат (точку наблюдения) взять центр красной планеты или ее синего спутника (см. рис. 8.5). А так, при неподвижном центре координат, орбита спутника нам кажется некой спиралью – «размазанным» эллипсом. К этой «небесной паре» справа приближается более массивная одиночная черная планета (время t = 0,1 – единицы не указаны; можно вспомнить Даниила Хармса с его *«прошло несколько колов времени»*). Красная планета с синим спутником движется все ближе и ближе к одиночной черной планете, что искажает их эллиптические траектории (t = 0,73 и t = 0,79). Затем синий спутник слетает с орбиты красной планеты (t = 0,9) и переходит на орбиту черной планеты (t = 1,1 и t = 2), а красная планета продолжает полет в одиночестве… Анна слетает с орбиты Каренина и переходит на орбиту Вронского…

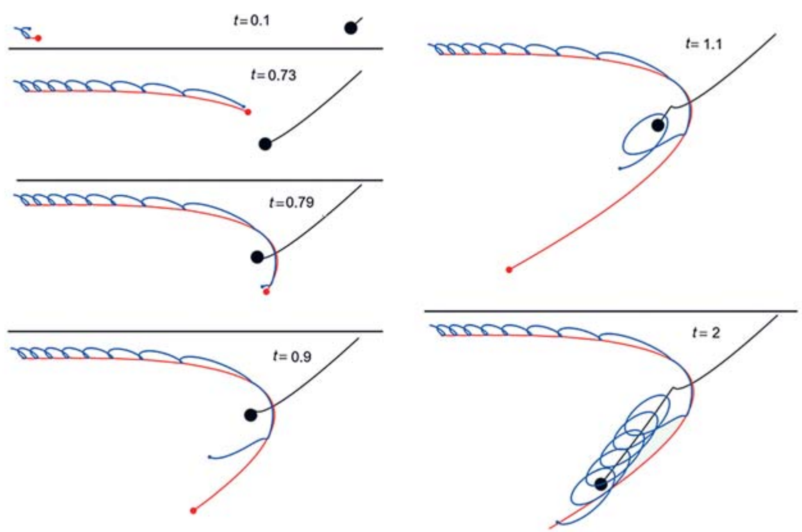


Рис. 8.1. Частный случай численного решения задачи о трех телах (перехват спутника). См. анимацию здесь: https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Celestial-Mechanics/m-p/562213

Но задача о трех телах, в частности такая, какая показана на рис. 8.1, не имеет, строго говоря, и численного однозначного решения. Если сменить метод интегрирования, примененный к решению этой задачи – к системе дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями (так называемая задача Коши), то может оказаться, что синий спутник левой красной планеты после встречи с правой черной планетой не перейдет на новую орбиту, а останется на старой, несколько изменив форму орбит (рис. 8.2).

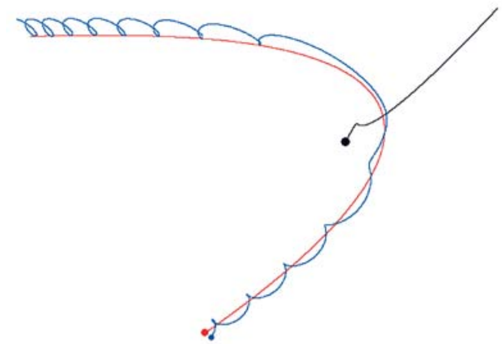


Рис. 8.2. Частный случай численного решения задачи о трех телах (изменение орбиты спутника)

Или же может оказаться так, что эта роковая встреча планет приводит к тому, что все три небесных тела разлетятся в разные стороны… Как это похоже на жизненные ситуации! Картина роковой встречи супружеской пары с третьим человеком (встреча трех небесных тел) может кардинально меняться и при незначительном изменении начальных условий – исходных координат и начальных скоростей или метода интегрирования.

В [14] описана задача и о четырех небесных телах: две планеты со своими спутниками приближаются друг к другу, обмениваются спутниками и летят дальше «по своим делам» (рис. 8.3). У автора книги были две знакомые супружеские пары, которые почти одновременно развелись и обменялись спутниками жизни – заключили новые браки. Сейчас разводы – довольно рутинная бюрократическая процедура. А у Толстого это трагическая так и не законченная сюжетная линия романа. Но простота теперешнего развода – другая крайность. Иная супружеская пара, столкнувшись со сложной процедурой развода, сохранила бы брак и счастливо жила бы дальше – стерпится, слюбится!

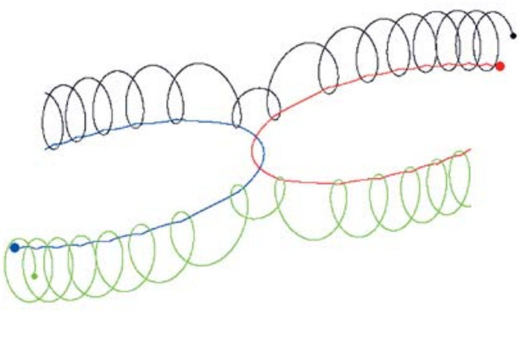


Рис. 8.3. Планеты обмениваются своими спутниками

Авторский рекорд – это восемь небесных тел (четыре планеты и четыре спутника), двигающихся в хороводе со сменой партнеров в «танцующих парах» – па-де-уи (pa-de-huit; рис. 8.4). Четыре планеты с одинаковой массой стартуют с одинаковой скоростью из вершин квадрата. Одновременно с этим из середин сторон квадрата стартуют четыре спутника с одинаковой массой (масса спутника намного меньше массы планеты) и с одинаковой скоростью (t = 0,1). Орбиты планет сворачиваются в четыре неподвижных овала, на форму которых спутники со своей ничтожно малой массой почти не влияют. Это эллипсы, имеющие один общий фокус в центре квадрата – в неподвижном центре масс планет и спутников. Более интересна судьба спутников: они вращаются вокруг планет по замысловатым траекториям, пока в конце концов не превысят вторую или даже третью космическую скорость и не вылетят из хоровода (t = 9). Надо полагать, что Толстой был знаком с подобными частными случаями решения задачи о более чем двух небесных телах [13, 14, 28]. Читаем в повести «Дьявол»: «*…был один пестрый, яркий цветами кружок молодых баб и девок центром всего, а вокруг него с разных сторон, как оторвавшиеся и вращающиеся за ним планеты и спутники, то девчата, держась рука с рукой, шурша новым ситцем расстегаев, то малые ребята, фыркающие чему-то и бегающие взад и вперед друг за другом, то ребята взрослые, в синих и черных поддевках и картузах и красных рубахах, с неперестающим плеваньем шелухи семечек, то дворовые или посторонние, издалека поглядывающие на хоровод*». Как все это похоже на «узор» рис. 8.4!

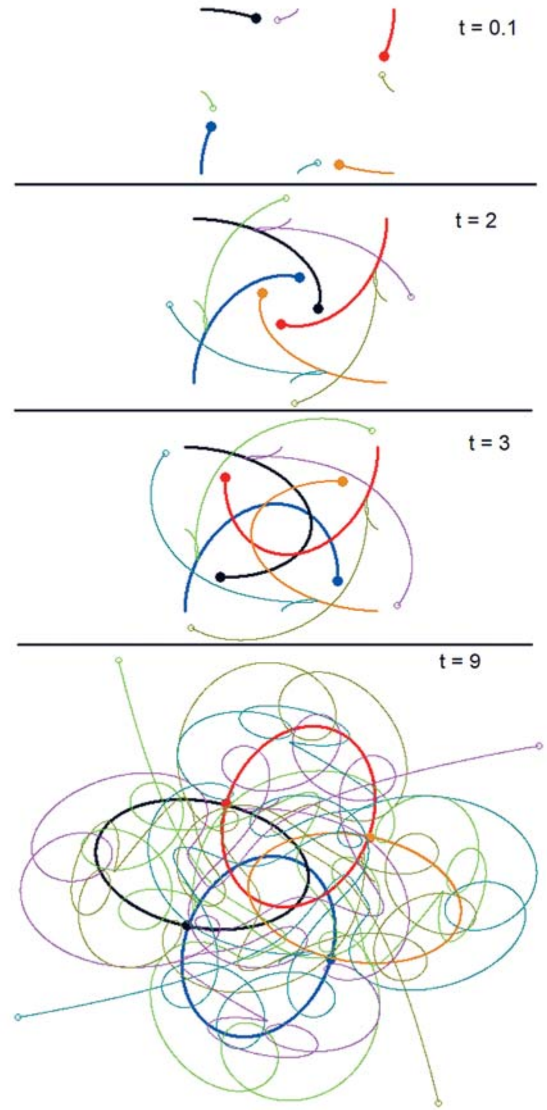


Рис. 8.4. Частный случай численного решения задачи о восьми (четыре планеты и четыре спутника) небесных телах (хоровод планет). См. анимацию здесь: https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Celestial-Mechanics/m-p/562213

Вернутся ли спутники в хоровод планет (см. последний кадр анимации на рис. 8.4) или навеки улетят в космос? Тут некую аналогию такого поведения можно найти и в литературе – у Толстого, но особенно у Гоголя. Есть главные герои повествования, вокруг которых вращаются некие «спутники». Один из спутников может в какой-то момент выпасть из повествования, а потом неожиданно вернуться назад. Задача об ипподроме в этой книге появилась в самом начале, потом пропала и вернулась в книгу только на 53-й странице. Так, в «Мертвых душах» Гоголя половой сообщает, что приехал и поселился в 16-м номере поручик *«неизвестно какой, из Рязани, гнедые лошади»*. Потом этот поручик на время пропадает (улетает в космос) и снова появляется в следующей главе поэмы для того, чтобы обсмотреть *«бойко и на диво стачанный каблук»* заказанного сапога. Нам кажется, что появился еще один персонаж-планета, но это всего лишь спутник, который мелькнет и пропадет навсегда.

Кстати, в «Дьяволе» Толстого описан роковой треугольник, который любовным назвать довольно сложно: Евгений Иртенев, его жена Лиза и женщина-вамп, женщина-дьявол Степанида. Толстой, предвосхищая технологию интерактивных литературных произведений, дал два окончания этой повести с разной степенью «жесткости», «жести», как теперь говорят: герой повести убивает себя и герой повести убивает «дьявола» – Степаниду. В «Крейцеровой сонате» тоже можно увидеть два конца разной степени жесткости – реальное убийство мужем жены из-за ревности и рассказ в поезде мужа, сошедшего с ума, о несовершенном злодеянии.

Кстати, о жесткости («жести») в математике.

Есть системы дифференциальных уравнений (а к ним, повторяем, сводится решение задачи о небесных телах), которые характеризуют как жесткие [4]. Они часто возникают в электротехнике, химической кинетике и в уже знакомой нам небесной механике. При численном интегрировании таких уравнений требуется проявлять ту или иную степень «нежности» – задавать разные шаги интегрирования для разных уравнений. Этим достигается компромисс точности и скорости решения. Но про скорость стали вспоминать все реже и реже, когда появились быстродействующие компьютеры. Кроме того, функция Odesolve (а именно она создала анимацию на рис. 8.1) в новейших версиях пакета Mathcad дополнена элементами искусственного интеллекта, который проявляет нужную «мягкость» при решении подобных задач.

В апреле 2021 года в журнале *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* появилась статья (https://doi.org/10.1007/s10569-021-10015-x), в которой описан новый подход к решению задачи о трех небесных телах. Он опирается не на анализ сил, действующих на небесные тела, а на анализ неких объемов фазовых пространств, на некую гидродинамику процесса, на некие потоки, захватывающие и двигающие планеты и спутники. Анонсируется, что данный подход может наконец-то абсолютно точно решить задачу о трех небесных телах. Но подобных анонсов было довольно много со времен Толстого и Пуанкаре и еще раньше. Нужно подождать реакции других ученых.

Рисунок 8.1 касается еще одной важной проблемы, затронутой в «Анне Карениной». Это неравенство мужчин и женщин в жизни, и в частности в браке. Две планеты, показанные на рис. 8.1, красная и черная, – это для всех нас по умолчанию мужчины, мужья, а синий спутник, который переходит от одной планеты к другой, – это, конечно, женщина, жена, которая не имеет права «гулять» (см. сноску 23 на стр. 156; Вронский искренне полагал, *«что лгать не надо мужчинам, но женщинам можно, – что обманывать нельзя никого, но мужа можно»*). Но в [14] есть и такой рисунок: синий спутник неподвижен (он закреплен в начале координат), а вокруг него попеременно вращается то один мужчина, пардон, планета, то другой (рис. 8.5: вокруг синей Анны вращается красный Каренин, к ним подлетает черный Вронский, прогоняет Каренина и сам начинает вращаться вокруг Анны). Отсюда вывод: точка зрения (точка отсчета координат) может кардинально изменить оценку тех или иных событий или математических моделей. Такой прием часто применял Толстой: «орбита» (поступок Анны) резко меняет свою «траекторию» в оценках разных людей. Долли, например, ее понимала, но большинство светского общества (княгиня Тверская и проч.) осуждало.

Рис. 8.5. Задача о трех небесных телах (см. рис. 8.1) с измененной точкой отсчета

Давайте проведем мысленный статистический эксперимент и у всех взрослых людей на планете измерим какой-либо параметр: вес, рост (см. рис. 16.3), уровень интеллекта (ум) или художественного вкуса (см. рис. 6.2) и т.д. – словом, все то, что можно измерить числом или оценить лингвистическими критериями (гений, талант, очень умный, просто умный… и совсем дурак). Полученные точки превратим в кривые, где по горизонтальной оси отложим параметр человека, а по вертикальной – процент людей с данным параметром. При этом статистическую обработку проведем отдельно для мужчин и женщин. Что мы получим?

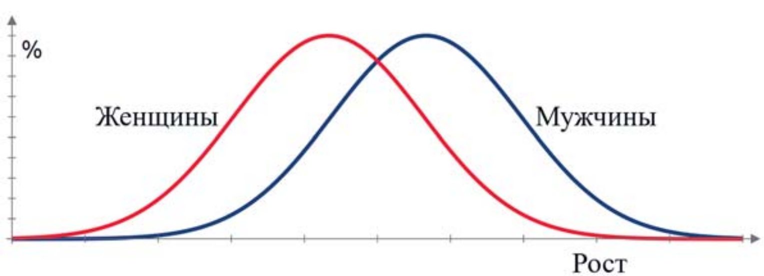


Рис. 8.6. Гендерный статистический случай 1

Кривые на рис. 8.6 получаются для тех параметров человека, значение которых у мужчин больше, чем у женщин (рост, вес, сила мышц и т.д.). Это, как многие считают, связано с эволюцией – если среднестатистическая мужская особь крупнее женской, то новые поколения укрупняются. У пауков, например, самцы намного меньше самок, и пауки сейчас, слава богу, более мелкие, чем в доисторические времена.

А так (рис. 8.7) могут выглядеть кривые для параметров, значения которых у человека за последние несколько тысяч лет не менялись, – умственные способности, например. Многие вполне обоснованно полагают, что современный человек, если убрать налет образованности и культуры, ненамного умнее древнего грека, китайца или египтянина. Среди мужчин гениев и талантов (нобелевских и прочих лауреатов, великих математиков, талантливых изобретателей, знаменитых писателей, художников, композиторов) больше лишь потому, что и… дураков среди мужчин достаточно (см. стр. 5, где упомянута всего лишь одна женщина – Агата Кристи). Но средняя женщина умнее среднего мужчины – центр «женской» кривой приподнят за счет меньшего разброса по краям: площади фигур под графиками (опять интегральное исчисление!) одинаковы – никого не обижая, будем считать, что Господь Бог или Природа (кто как для себя считает) одинаково наделили умом обе половины человечества.

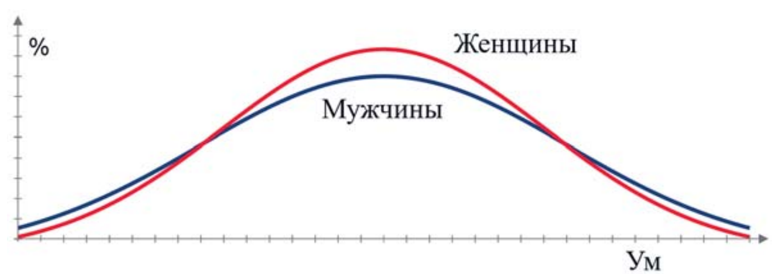


Рис. 8.7. Гендерный статистический случай 2

Справедливости ради нужно отметить, что у Толстого описана проблема трех небесных тел, где в качестве спутника планеты выступает не женщина, а мужчина. Пьер Безухов сначала невольно попадает в орбиту Элен Курагиной, но потом «вольно» переходит на орбиту Наташи Ростовой. Николай Ростов сначала «крутится» вокруг кузины Сони, но в конце концов становится «спутником жизни» княжны Марьи. Вокруг некрасивой, но богатой Жюли Карагиной вращалось много женихов, увлекаемых силой притяжения ее богатства.

В «Крейцеровой сонате», где вопрос семьи и брака Толстой довел до вершины абсурда, есть такие слова: *«А то, что одна* <женщина, жена> *побольше знает математики, а другая умеет играть на арфе, – это ничего не изменит. Женщина счастлива и достигает всего, чего она может желать, когда она обворожит мужчину. И потому главная задача женщины – уметь обвораживать его. Так это было и будет. Так это в девичьей жизни в нашем мире, так продолжается и в замужней. В девичьей жизни это нужно для выбора, в замужней – для властвованья над мужем»*. Что бы Толстому на это возразила, например, Софья Ковалевская – первая русская женщина профессор математики?! А вот Чехов, произведения которого можно условно считать краткими аннотациями произведений Толстого, так писал в рассказе «В пансионе»: *«Роскошь девочка! Ноздрями шевелит, пострел. Чует, что в июне на волю вырвется… Дай только вырваться, забудет она и эту Жевузешку* <хозяйку пансиона>, *и болвана Дырявина* <учителя математики>, *и алгебру… Не алгебра ей нужна! Ей нужен простор, блеск… нужна жизнь…»*.

Женский вопрос можно видеть и на рис. 11.6 – в классе только мальчики и ни одной девочки. А другого класса (женского, например) в этой сельской школе, скорее всего, не было.

Книга, которую читатель держит в руках, издана в Московском педагогическом государственном университете (бывший «Ленинский»). Его история началась в 1872 году, когда российский ученый и общественный деятель Владимир Герье (1837–1919) основал Московские высшие женские курсы (МВЖК) – первое учебное заведение в России, открывшее женщинам любого сословия доступ

к высшему образованию на родине. До этого они могли учиться только в зарубежных университетах. Упомянутая Софья Ковалевская – первая не только в России, но и в мире профессор математики – училась в Германии и Швеции.

В наше время проблема неравенства в браке перешла в другую плоскость – в плоскость однополых браков. Что бы сказал Толстой про это? Молодой Толстой, зрелый Толстой и Толстой на склоне своей жизни!

Почему же иллюстрация отношений людей через задачу о движении планет появляется только в романе «Воскресение»? Можно предположить, что в многочисленных рецензиях на «Анну Каренину» были упоминания этой физико-математической задачи и Толстой решил вставить ее только в роман «Воскресение». С другой стороны, сравнение людей с небесными телами – это довольно избитый и пошлый прием и Лев Николаевич – виртуозный стилист – не стал использовать его в «Анне Карениной», а только вскользь упомянул об этой задаче в романе «Воскресение». Толстой, безусловно, интересовался физико-математической стороной этой проблемы, нюансами аналитического решения задачи о двух телах и безуспешными попытками аналитического решения усложненной задачи.

«Приземленная» небесная механика называется *баллистикой*. Если выстрелить из пушки и допустить, что снаряд – это материальная точка, обладающая массой, но не обладающая размерами, Земля плоская, сопротивления воздуха нет, ускорение свободного падения константа, а гравитационное поле однородно, то снаряд полетит строго по «нейтральной» (см. сноску 7 на стр. 48) параболе. На рис. 8.8 с помощью сайта wolframalpha.com показан вывод формул (выражений для $x(t)$ и $y(t)$ – координат по горизонтальной и вертикальной осям) полета снаряда, выпущенного из пушки со скоростью v_0 под углом a_0 к горизонту. Отдельно аналитически решаются пара обыкновенных дифференциальных уравнений баланса сил, действующих на снаряд по горизонтальной (слева) и вертикальной (справа) проекциям. Задействован второй закон Ньютона, гласящий, что силы, действующие на материальную точку, «уравновешиваются» произведением массы точки на ее ускорение – на вторую производную пути по времени: $x''(t)$ и $y''(t)$. Первая производная $x'(t)$ и $y'(t)$ – это скорость материальной точки. В горизонтальном направлении на летящий снаряд никакие силы не действуют, а в вертикальном направлении действует сила тяжести – произведение массы снаряда m на ускорение свободного падения g.

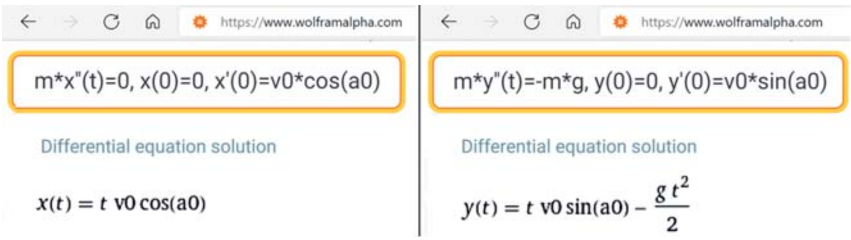


Рис. 8.8. Аналитическое решение с помощью интернет-ресурса задачи о полете пушечного снаряда

В диалоговых окнах сайта, показанного на рис. 8.8, кроме самих уравнений записаны и начальные условия – положение снаряда в начальный момент времени и его начальная скорость. В начальный момент времени снаряд находится в начале координат, а горизонтальные и вертикальные проекции его скорости определяются через косинус и синус угла наклона пушки к горизонту.

Когда автор впервые познакомился с обыкновенными дифференциальными уравнениями, то он сразу подумал о том, что есть и необыкновенные дифференциальные уравнения. Аналогия из литературы: есть просто лето, а есть «Необыкновенное лето» – роман Константина Федина, одного из «главных инженеров человеческих душ» (см. сноску 22 на стр. 153). Но оказалось, что никаких «необыкновенных дифференциальных уравнений» нет – есть дифференциальные уравнения в частных производных, решением которых являются функции не одной, а нескольких переменных.

В этом смысле термин «обыкновенное дифференциальное уравнение» не совсем удачен. Но его уже не заменишь на другой, более подходящий для данных уравнений.

На рис. 8.9 аналитическое решение задачи о полете снаряда, показанное на рис. 8.8, продублировано в первых двух строках: положение снаряда в полете по времени t по двум координатам X и Y определяется двумя уже нам известными простыми аналитическими формулами. Первое равенство решается (solve) относительно переменной t. Полученное решение подставляется (substitute) во второе равенство, что и дает квадратное уравнение – уже упомянутую параболу. Если же учитывать сопротивление воздуха, то придется отойти от аналитики и перейти к численному решению. При этом необходимо будет учитывать массу снаряда m и его диаметр d, вернее, площадь поперечного сечения S (мы предположили, что снаряд круглый (ядро), а пушка трехдюймовка). К силам, действующим на снаряд, добавится сила трения о воздух, пропорциональная площади поперечного сечения снаряда, плотности воздуха ρ_{air} и квадрату скорости снаряда. Коэффициент пропорциональности – это переменная f.

В блоке **Решить** на рис. 8.9 к уравнениям, показанным на рис. 8.8, добавлена сила трения о воздух. По горизонтали она действует только в одну сторону, против движения снаряда, а по вертикали – сначала в одну (вниз), а потом в другую (вверх), что связано с изменением направления полета снаряда по вертикали. Поэтому-то во втором («вертикальном») уравнении квадрат скорости заменен на произведение скорости на ее абсолютное значение. Так будет учтено изменение направления движения снаряда по вертикали.

О методе численного решения задачи будет рассказано ниже.

На графике рис. 8.9 показаны две траектории полета снаряда – в вакууме (верхняя кривая-парабола) и с учетом сопротивления воздуха. Если коэффициент f обнулить, то две кривые сольются в одну параболу.

Ремарка о коэффициенте трения. Вот что можно прочесть в «Севастопольских рассказах» Толстого. *«Только что вы немного*

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha_0) \xrightarrow{solve,\, t} \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha_0)}$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha_0) - g \cdot \frac{t^2}{2} \xrightarrow{substitute,\, t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha_0)}} y = \frac{v_0 \cdot x \cdot \sin(\alpha_0)}{v_0 \cdot \cos(\alpha_0)} - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos(\alpha_0)^2}$$

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad a = -\frac{g}{2 \cdot {v_0}^2 \cdot \cos(\alpha_0)^2} \qquad b = \tan(\alpha_0) \qquad c = 0$$

$$v_0 := 700\ \frac{m}{s} \qquad \alpha_0 := 60\ ^\circ$$

$$x(t) := v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha_0) \qquad y(t) := v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha_0) - g \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$m := 3\ kg \quad d := 3\ in \quad S := \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 45.6\ cm^2 \quad f := 0.03 \quad \rho_{air} := 1.25\ \frac{kg}{m^3} \quad t_{end} := 120\ s$$

Решить

Ограничения

$$x(0\ s) = 0\ m \qquad x'(0\ s) = v_0 \cdot \cos(\alpha_0) \qquad m \cdot x''(t) = -f \cdot S \cdot \rho_{air} \cdot x'(t)^2$$

$$y(0\ s) = 0\ m \qquad y'(0\ s) = v_0 \cdot \sin(\alpha_0) \qquad m \cdot y''(t) = -g \cdot m - f \cdot S \cdot \rho_{air} \cdot y'(t) \cdot |y'(t)|$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} x_{air} \\ y_{air} \end{bmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left(\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t_{end}\right)$$

$$t := 0\ s, \frac{t_{end}}{1000} .. t_{end}$$

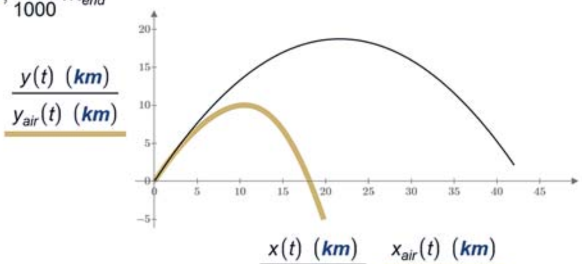


Рис. 8.9. Решение задачи о полете пушечного снаряда

взобрались в гору, справа и слева <от> *вас начинают жужжать штуцерные пули…»* («Севастополь в декабре месяце»). *«Пули свистели не по одной, как штуцерные, а роями, как стадо осенних птичек пролетает над головами»* («Севастополь в августе 1855 года»).

Одна из причин поражения николаевской России в Крымской войне, участником которой был Лев Толстой, – это техническая отсталость русской армии. У нее почти не было винтовок, которые в те времена назывались штуцерами, а были в основном гладкоствольные ружья, заряжавшиеся с дула. Винтовки (их было много у англичан и французов) с нарезкой в стволе (с «винтом») стреляли не круглыми пулями, а пулями, имеющими заостренную форму. Чтобы такая пуля не кувыркалась в полете, ее закручивали с помощью этой самой нарезки (винта) в стволе. На полет закрученной («штуцерной») пули влиял гироскопический эффект (удержание оси вращения объекта в пространстве). Аналогия из античных времен и современных спортивных состязаний: дискобол закручивает диск, чтобы он не кувыркался в полете и летел (планировал) дальше. А диск (и, кстати, копье) – это не только современный спортивный, но и древний боевой снаряд! Коэффициент трения о воздух f у заостренной винтовочной пули намного ниже, чем у круглой ружейной. Винтовки стреляли намного дальше и, главное, точнее, кучнее. Да и с гладкоствольными ружьями в русской армии не все было ладно. Последние слова лесковского Левши были такими: *«Скажите государю, что у англичан ружья кирпичом не чистят: пусть чтобы и у нас не чистили, а то, храни бог войны, они стрелять не годятся»*. Но *«государю так и не сказали, и чистка все продолжалась до самой Крымской кампании. В тогдашнее время как стали ружья заряжать, а пули в них и болтаются, потому что стволы кирпичом расчищены»*.

Из рис. 8.9 видно, что «безвоздушная» траектория снаряда имеет четкую *симметрию* относительно вертикальной прямой, проходящей через вершину параболы. Сопротивление воздуха не только сокращает дальность полета пули или снаряда, но и нарушает симметрию – траектория становится кривобокой. А симметрия – это важное понятие не только математики, но и искусства, литературы. Яркий пример. В повести «Хаджи-Мурат» Толстой старается придерживаться симметрии, некоего баланса при описании зверств, чинимых как горцами, так и русскими войсками. Чувствуется некая зловещая симметрия и в «несмертельном» приговоре Николая I польскому студенту (наказание розгами: *«Провести 12 раз скрозь тысячу человек»*) и в подобном «несмертельном» приговоре Шамиля сыну Хаджи-Мурата (выколоть глаза). Оба приговора были внушены и Николаю I, и Шамилю как бы сверху. Но ни в литературе, ни в реальной жизни нет полной симметрии, а есть только некое ее подобие…

Вернемся от баллистики назад к небесной механике.

Если поверхность Земли постепенно «закручивать» в сферу, то параболическая траектория снаряда тоже будет постепенно «закручиваться» сначала в эллипс, а потом в окружность (первая космическая скорость и ниже) или, наоборот, будет «раскручиваться» в гиперболу (вторая космическая скорость и выше).

На рис. 8.10 показаны орбиты спутника, запущенного с поверхности Земли (сопротивление воздуха не учитывается) в горизонтальном направлении с разными начальными скоростями v_0:

- $v_0 = 0$: спутник летит (падает) по прямой к центру Земли, если принять в нашей математической модели, что Земля – это не шар, а материальная точка с очерченной вокруг нее окружностью; отрезок прямой, по которой летит спутник, – это вырожденный эллипс;
- $0 < v_0 < v_1$ (v_1 – это первая космическая скорость): спутник «летает» по эллиптической орбите внутри Земли, если опять же Землю рассматривать не как шар, а как материальную точку;
- $v_0 = v_1$: первую космическую скорость называют и круговой скоростью; наш спутник будет летать по круговой орбите на поверхности Земли;
- $v_1 < v_0 < v_2$ (v_2 – это вторая космическая скорость): спутник летает вокруг Земли по эллиптической орбите;
- $v_0 = v_2$: вторую космическую скорость называют и параболической скоростью; наш спутник будет удаляться от Земли по параболической траектории (это уже не спутник, а некий космический зонд);
- $v_0 > v_2$: космический зонд будет удаляться от Земли по гиперболической траектории.

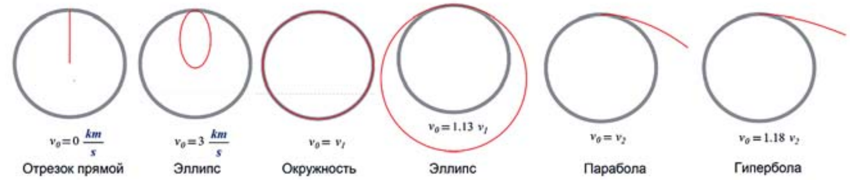


Рис. 8.10. Траектории движения спутника вокруг Земли

Два крайних правых случая на рис. 8.10 (парабола и гипербола) внешне мало различаются. Но гипербола качественно отличается от параболы тем, что у гиперболы есть две ветви, одна из которой, да и то не вся, показана на рис. 8.10. Если небесный объект летит по гиперболической орбите, то где-то в космическом пространстве прочерчивается еще одна некая симметричная фантомная траектория его полета… Это мы узнали еще в школе на уроках геометрии и алгебры, рисуя в тетрадке параболу вида x^2 и гиперболу вида $1/x$ с двумя ее ветвями по разные стороны оси ординат.

Есть, кстати, и третья космическая скорость (бог любит троицу!). Ее нужно достигнуть, если необходимо, чтобы космический зонд, стартовавший с поверхности Земли, покинул Солнечную систему.

Напоминаем, что первая космическая скорость для Земли равна примерно 7,9, а вторая – 11,2 километров в секунду. Как говаривал Веничка Ерофеев, *«почему-то в России никто не знает, отчего умер Пушкин, а как очищается политура* <и чему равна первая космическая скорость> *– это всякий знает»*.

Здесь нужно, конечно, упомянуть комету 1812 года. Есть даже такой бродвейский мюзикл «Наташа, Пьер и Большая комета 1812 года» (“Natasha, Pierre & The Great Comet of 1812”). В «Войне и мире» можно прочесть, что Пьер Безухов *«радостно, мокрыми от слез глазами, смотрел на эту светлую звезду, которая, как будто с невыразимою быстротой пролетев неизмеримые пространства по параболической линии, вдруг, как вонзившаяся стрела в землю, влепилась тут в одно избранное ею место, на черном небе»*. Однако «Толстой мне друг, но истина дороже»! Необходимо отметить, что эта комета летела не по *параболической*, а по *эллиптической* траектории и преодоленные ею пространства вполне измеримые.

В 1811 и 1812 годах люди, включая и Пьера Безухова, еще не знали, что комета C/1811 F1 (а это ее официальное астрономическое обозначение) летает по замкнутой и, заметим, по эллиптической траектории с периодом примерно 3100 лет. Но это должен был уже знать Толстой, когда писал «Войну и мир». Однако Лев Николаевич вставил тут параболу, а не эллипс потому, что эллипс был уже использован при описании… Красносельского ипподрома. Шутка, конечно, но в каждой шутке, как известно, есть доля истины. Толстой был офицером-артиллеристом, но не офицером-ракетчиком. В каждой незамкнутой кривой ему виделась парабола – идеальная траектория полета снаряда (см. выше). А в те времена многие считали, что кометы – это чужеродные странники, пролетающие сквозь Солнечную систему по незамкнутым параболическим траекториям.

А давайте рассчитаем траекторию полета кометы 1812 года [7], которую через шампанское упоминает и Пушкин в «Евгении Онегине». Вот бы сесть рядышком с Толстым и Пушкиным у компьютера и показать им, как сейчас можно просто и быстро рассчитать такой полет! Толстой сидит слева, а Пушкин – справа, а ты расположился между ними и показываешь на экране компьютера ход решения задачи о полете кометы! Толстого и Пушкина, конечно, в первую очередь заинтересовал бы компьютер своими функциями пишущей машинки, а не калькулятора… Но и математическая сторона вопроса была бы им не чужда. Особенно Толстому.

На рис. 8.11 представлена краткая информация о комете 1812 года, взятая из Википедии. Эти цифры будут служить исходными данными нашего расчета.

Бесспорно, что Пушкин представлял себе хвост этой кометы (см. рис. 8.11), когда писал: *«Вошел: и пробка в потолок, / Вина кометы брызнул ток»*. Но давайте на время оставим поэзию («словесную гармонию») и обратимся к алгебре – покажем, что комета не такая уж беззаконная *«в кругу расчисленных светил»* (автор у компьютера толкает Пушкина в бок и показывает ему на эти его строки).

Первой строкой стихотворения, пардон, расчета на рис. 8.12 вводятся значения гравитационной постоянной *G*, астрономической единицы длины AU (она примерно равна расстоянию от Зем-

Рисунок астронома Уильяма Генри Смита

Открытие	
Первооткрыватель	Оноре Фложерг
Дата открытия	25 марта 1811
Альтернативные обозначения	1811 I 1811a
Характеристики орбиты	
Эксцентриситет	0,995125
Большая полуось (a)	212 а. е.
Перигелий (q)	1,035412 а. е.
Афелий (Q)	424 а. е.
Период обращения (P)	3100 а
Наклонение орбиты	106,9342°
Последний перигелий	12 сентября 1811

Рис. 8.11. Информация о комете (источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/C/1811_F1_(Большая_комета))

ли до Солнца – 150 миллионов километров) и массы Солнца. Цифры взяты из той же Википедии.

Во второй строке оценивается масса ядра кометы (m_c). Мы допустили, что ядро кометы – это шар диаметром 30 километров (d_c) с плотностью 500 килограммов на метр кубический. Эта масса в нашем расчете не будет влиять на форму ее орбиты, так как она ничтожно мала по сравнению с массой Солнца, вокруг которого комета вращается. Но какое-то значение для массы кометы нужно принять, чтобы не было ошибки в расчете, о которой будет рассказано ниже. Эта ошибка являет собой своеобразный компромисс

$$G := 6.674 \cdot 10^{-11}\ N \cdot \frac{m^2}{kg^2} \qquad AU := 150 \cdot 10^6\ km \qquad m_s := 1.9885 \cdot 10^{30}\ kg$$

$$d_c := 30\ km \qquad \rho_c := 500\ \frac{kg}{m^3} \qquad m_c := \rho_c \cdot \frac{4}{3}\,\pi \cdot \left(\frac{d_c}{2}\right)^3 = \left(7.069 \cdot 10^{12}\right)\ tonne$$

$$a := 212\ AU \qquad e := 0.995125$$

$$b := a \cdot \sqrt{1-e^2} = 20.908\ AU \qquad c := a \cdot e = 210.967\ AU \qquad Q := a + c = 422.967\ AU$$

$$v := 0.1\ \frac{km}{s} \qquad t_{end} := 3100\ yr \qquad N := 3100 \cdot 12$$

Решить

Ограничения

$$r(0\ s) = Q \qquad r(t) = \sqrt{\left(c - x_c(t)\right)^2 + y_c(t)^2}$$

$$x_c(0\ s) = -a \qquad x_c'(0\ s) = 0\ \frac{m}{s} \qquad m_c \cdot x_c''(t) = G \cdot \frac{m_c \cdot m_s}{r(t)^2} \cdot \frac{c - x_c(t)}{r(t)}$$

$$y_c(0\ s) = 0\ m \qquad y_c'(0\ s) = v \qquad m_c \cdot y_c''(t) = G \cdot \frac{m_c \cdot m_s}{r(t)^2} \cdot \frac{-y_c(t)}{r(t)}$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} r \\ x_c \\ y_c \end{bmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left(\begin{bmatrix} r(t) \\ x_c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix}, t_{end}, N\right)$$

Рис. 8.12. Расчет орбиты кометы 1812 года

формы и содержания, который часто имеет место не только в литературе, но и в математике.

В третьей строке вводятся взятые из той же Википедии (см. рис. 8.11) параметры орбиты кометы – длина большой полуоси эллипса *a* (см. рис. 4.1, где показано, что это такое) и его эксцентриситет *e* – степень его сплюснутости. У окружности (частный, предельный случай эллипса) эксцентриситет равен нулю. Если эксцентриситет приближать к единице, то окружность все более и более будет сплющиваться в эллипс, пока не превратиться в отрезок прямой (еще один частный, предельный случай эллипса – см. левый край рис. 8.10).

В четвертой строке по известным геометрическим формулам рассчитываются длина малой полуоси эллипса *b*, фокальное расстояние *c* (см. рис. 4.1) и афелий *Q* – максимальное расстояние, на которое наша комета будет удаляться от Солнца, находящегося в правом фокусе эллипса.

В пятой строке расчета задается скорость кометы в принятой нами точке ее старта – в афелии. Эту скорость методом проб и ошибок нужно подобрать такую, чтобы длина малой полуоси орбиты кометы стала равной заданной величине *b*. Комета стартует вертикально вверх – проекция скорости по оси *X* равна нулю. Далее задается конечное время расчета t_{end}, за которое комета сделает один оборот вокруг Солнца. Переменная *N* – это число разбиений отрезка времени от нуля (старт кометы) до значения t_{end} на отдельные точки, где будут рассчитаны координаты кометы. Данный отрезок времени разбит на интервалы длительностью один месяц, которых, как известно, двенадцать в году ($N = 3100 \cdot 12$). 3100 лет – это, повторяем, период обращения кометы.

В блоке **Решить**, во-первых, приведено выражение для расчета расстояния между Солнцем и кометой, которое равно *Q* при старте, и, во-вторых, записаны два известных физических закона: второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения. Второй закон Ньютона гласит, что сила, действующая на материальную точку, «уравновешивается» произведением массы материальной точки на ее ускорение – на значение второй производной пути по времени (см. два штриха у функций $x_c(t)$ и $y_c(t)$). Сила же, действующая на комету, – это гравитационная сила, прямо пропорциональная произведению массы двух небесных тел (у нас это Солнце и комета) и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними (закон всемирного тяготения). В уравнениях можно, конечно, сократить массу кометы m_c, но этого делать не нужно, так как потеряется физический смысл уравнения – конфликт формы и содержания, который был отмечен выше. Уравнений баланса сил два – по направлению *X* и по направлению *Y* (принцип суперпозиций). Так и хочется сказать: по горизонтальному (ось *X*) и вертикальному (ось *Y*) направлениям, но в космосе нет верха и низа! Вторая дробь в правых частях уравнений баланса сил служит для расчета значений проекций гравитационной силы по направлениям X и Y. До уравнений записаны начальные условия – положение и скорость кометы в начальный момент времени с разложениями этих величин по двум проекциям.

Функция Odesolve высчитывает значения искомых функций с именами r, x_c и y_c в заданных N точках орбиты, по которым интерполяцией генерируются три функции пользователя $r(t)$, $x_c(t)$ и $y_c(t)$. Первая функция возвращает текущее расстояние от Солнца до кометы в зависимости от времени. Две другие – текущие координаты кометы.

На рис. 8.13 и 8.14 показана рассчитанная траектория кометы в целом и вблизи Солнца.

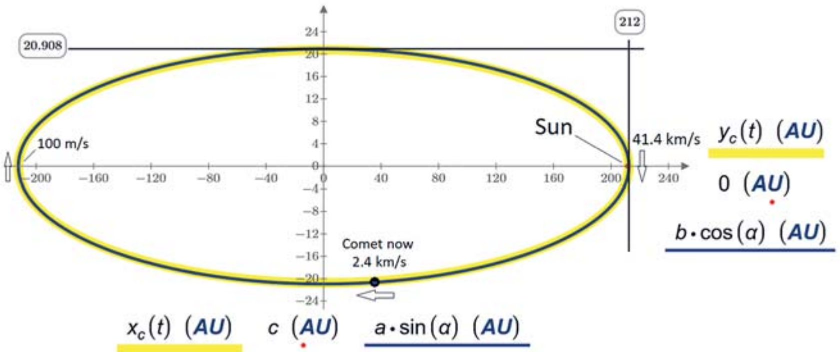


Рис. 8.13. Орбита кометы 1812 года (у осей разные масштабы)

На рис. 8.13 эллипс прописан двумя линиями – толстой желтой и тонкой черной. Толстая желтая линия – это траектория кометы, полученная из численного решения системы дифференциальных уравнений (см. рис. 8.12), а тонкая черная – это эллипс с полуосями a и b. Эти две кривые практически совпали, что свидетельствует о высокой точности нашей математической модели кометы – цифрового двойника кометы, как принято сейчас говорить. Эта математическая модель позволяет рассчитать скорость кометы в разных точках орбиты. В афелии (крайняя левая точка на эллипсе на рис. 8.13) она равна заданной нами величине 100 метров в секунду (360 километров в час). В перигелии же (крайняя правая точка вблизи Солнца) комета разго-

няется до максимальной скорости 41,4 километра в секунду. В точке, где предположительно находится комета в 2022 году (а она показана на графике), ее скорость равна 2,4 километра в секунду.

Интересно посмотреть на траекторию кометы вблизи Солнца и Земли (рис. 8.14) – там, где ее видел Пьер Безухов в январе 1812 года после памятного разговора с Наташей Ростовой, когда он фактически первый раз признался ей в любви.

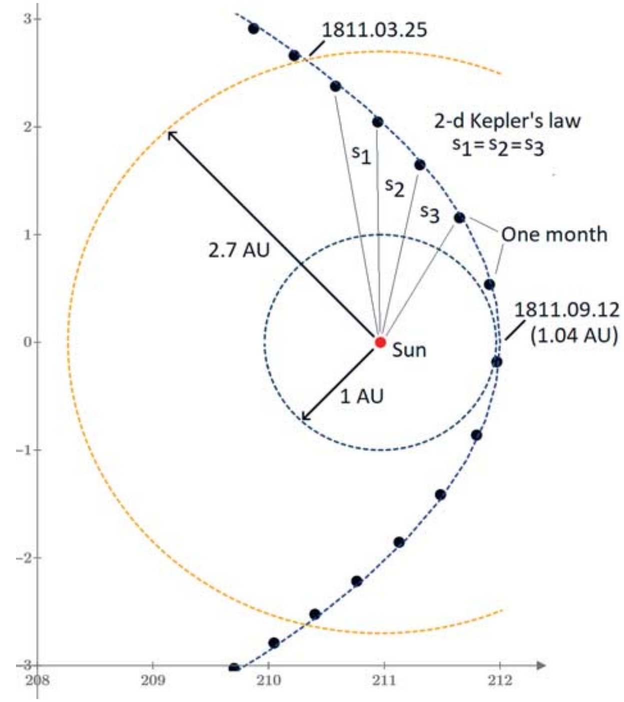


Рис. 8.14. Орбита кометы 1812 года вблизи Солнца (у осей одинаковые масштабы)

Точки на рис. 8.14 – это положения кометы в каждый месяц, рассчитанные по дифференциальным уравнениям, записанным на рис. 8.12, а пунктирная линия, проходящая около точек, – это дуга эллипса с полуосями, равными заданным значениям a и b. Именно дуга эллипса, а не парабола, как писал Толстой (автор у компьютера толкает в бок уже не Пушкина, а Толстого!). Точки находятся вблизи пунктира, что еще раз подтверждает высокую точность численного решения системы дифференциальных уравнений движения кометы.

Впервые эту комету заметил на небе французский астроном Оноре Фложерг 25 марта 1811 года. Она находилась в это время на расстоянии 2,7 астрономической единицы от Солнца – см. дугу окружности с соответствующим радиусом на рис. 8.14. А 12 сентября 1812 года комета оказалась на минимальном расстоянии от Солнца (перигелий, 1,04 астрономической единицы).

Пунктирная окружность на рис. 8.14 с радиусом одна астрономическая единица – это не орбита Земли, как может показаться. Дело в том, что плоскости вращения кометы 1812 года и Земли вокруг Солнца наклонены друг относительно друга почти на 107 градусов (см. рис. 8.11). Этот угол больше 90 градусов, что отмечает направление вращения кометы вокруг Солнца. Орбита Земли, если ее нарисовать на рис. 8.14, будет представлять собой сильно сплюснутый эллипс, упирающийся двумя своими вершинами в окружность с радиусом одна астрономическая единица. Наши расчеты можно продолжить и нарисовать орбиты кометы и Земли уже не на плоскости, а в трехмерном пространстве. Но мы этого здесь делать не будем. Мы и так уже сильно напрягли математикой читателей-гуманитариев. Читатели же с физико-математическим образованием вполне обоснованно будут полагать, что в данном расчете нет ничего сложного и нового, заслуживающего особого внимания.

На рис. 8.14 отображен графически второй закон Кеплера – небесное тело, движущееся по эллиптической орбите, за одинаковые отрезки времени вырисовывает секторы эллипса с одинаковой площадью. Это является следствием того, что скорости небесного тела разные в разных точках эллиптической орбиты. На рис. 8.14 выделено три таких смежных сектора с равными площадями s_1, s_2 и s_3. Их несложно вычислить через все те же загадочные для Толстого-Левина интегралы.

Траектории небесных тел, показанные на рис. 8.1–8.4, получены автором с помощью программ, подобных той, какая изображена на рис. 8.12. Для этого достаточно увеличить число дифференциальных уравнений и несколько усложнить их.

А как люди поняли, что комета 1812 года летит не по параболической, а по замкнутой эллиптической траектории? Здесь будет весьма уместно толкнуть Пушкина в бок и напомнить ему его же строки из поэмы «Каменный гость»:

Дон Гуан
Ее совсем не видно
Под этим вдовьим черным покрывалом,
Чуть узенькую пятку я заметил.

Лепорелло
Довольно с вас. У вас воображенье
В минуту дорисует остальное;
Оно у нас проворней живописца,
Вам все равно, с чего бы ни начать,
С бровей ли, с ног ли.

Астрономы в те времена могли «заметить лишь узенькую пятку» кометы – траекторию ее движения вблизи Земли. «Дорисовать остальное» помогло воображение, вернее, холодный математический расчет. Что мы сейчас и сделаем, но уже не вручную, как во времена становления астрономии как науки, а на компьютере!

На рис. 8.15 в векторах X и Y записаны числовые значения координат кометы в пяти точках, которые астрономы могли определить, наблюдая комету. Эти точки отображены и на графике (см. рис. 8.14). Почему точек именно пять и не больше, и не меньше? Об этом будет сказано ниже!

Известно, что для рисования прямой на плоскости (кривая первого порядка) нужны минимум две точки. У эллипса же и гиперболы (кривые второго порядка) таких опорных точек должно быть пять. Параболе же и окружности достаточно трех точек.

На рис. 8.16 в первой строке записано в общем виде уравнение плоской кривой второго порядка. Если найти значения шести коэффициентов уравнения, то несложно построить саму кривую. Такая задача сводится к решению системы пяти линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с пятью неизвестными. А почему неизвестных коэффициентов шесть, а уравнений пять? Дело в том,

$$X := \begin{bmatrix} 202.662572911686 \\ 208.952538616392 \\ 211.966669674178 \\ 208.751324696265 \\ 200.49273138321 \end{bmatrix} AU \qquad Y := \begin{bmatrix} 6.07060831977258 \\ 3.48650425174498 \\ -0.232488037752813 \\ -3.59964263161568 \\ -6.72285224432161 \end{bmatrix} AU$$

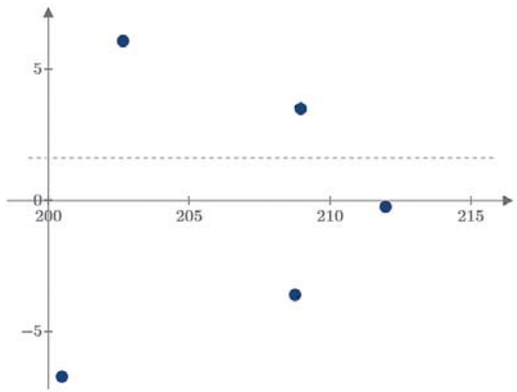


Рис. 8.15. Пять точек положения кометы 1812 года

что уравнение плоской кривой второго порядка с шестью неизвестными коэффициентами имеет бесконечное число решений, включая и тривиальное решение, когда все коэффициенты равны нулю. Одно из «ненулевых» решений можно найти так: задать значение одного из коэффициентов, а потом рассчитать значения остальных пяти, которые при подстановке их в уравнение превращают его в тождество. Во второй строке расчета на рис. 8.16 формируется квадратная матрица M коэффициентов при неизвестных СЛАУ и вектор свободных членов *v*, который хранит заданное значение шестого коэффициента a_0 уравнения кривой второго порядка (пусть это будет 100 астрономических единиц). Функция lsolve вернула решение СЛАУ – пять искомых коэффициентов, по которым можно построить траекторию кометы по двум половинкам эллипса – верхней $y_1(x)$ и нижней $y_2(x)$. Эти две функции получены в результате аналитического решения уравнения кривой второго порядка относительно переменной *y*.

$$a_{x2}\cdot x^2 + a_{xy}\cdot 2x\cdot y + a_{y2}\cdot y^2 + a_x\cdot 2x + a_y\cdot 2y + a_0 = 0$$

$$a_0 := 100\ AU$$

$$M := \begin{bmatrix} X_0^2 & 2X_0Y_0 & Y_0^2 & 2X_0 & 2Y_0 \\ X_1^2 & 2X_1Y_1 & Y_1^2 & 2X_1 & 2Y_1 \\ X_2^2 & 2X_2Y_2 & Y_2^2 & 2X_2 & 2Y_2 \\ X_3^2 & 2X_3Y_3 & Y_3^2 & 2X_3 & 2Y_3 \\ X_4^2 & 2X_4Y_4 & Y_4^2 & 2X_4 & 2Y_4 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_0 \\ -a_0 \\ -a_0 \\ -a_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \mathrm{lsolve}(M, v)$$

$$y_1(x) := -\frac{a_y + \sqrt{a_y^2 + 2\cdot a_y\cdot a_{xy}\cdot x + a_{xy}^2\cdot x^2 - a_{x2}\cdot a_{y2}\cdot x^2 - 2\cdot a_x\cdot a_{y2}\cdot x - a_{y2}\cdot a_0} + a_{xy}\cdot x}{a_{y2}}$$

$$y_2(x) := -\frac{a_y - \sqrt{a_y^2 + 2\cdot a_y\cdot a_{xy}\cdot x + a_{xy}^2\cdot x^2 - a_{x2}\cdot a_{y2}\cdot x^2 - 2\cdot a_x\cdot a_{y2}\cdot x - a_{y2}\cdot a_0} + a_{xy}\cdot x}{a_{y2}}$$

Рис. 8.16. Формирование и решение СЛАУ

На рис. 8.17 построена траектория полета кометы с опорой на пять точек, которые показаны на самом правом крае орбиты-эллипса.

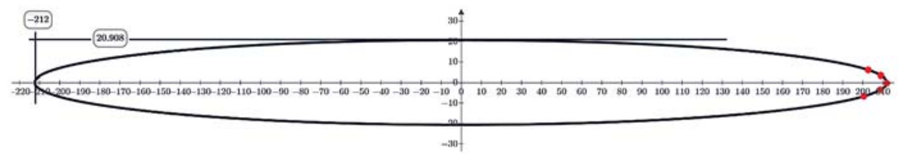


Рис. 8.17. Эллипс движения кометы 1812 года, построенный по пяти точкам (у осей одинаковые масштабы)

На сайте https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Great-Comet-of-1811-ODEs-solution/td-p/736652 можно увидеть аналитическое решение задачи о комете 1812 года, а также анимацию ее движения.

Автор мечтает создать полную трехмерную анимацию движения Солнца, Земли и кометы 1812 года. В среде этой анимации можно лететь в некой машине времени и пространства, огибая звезды, планеты и кометы и приближаясь к моменту, показанному на рис. 8.18.

Рис. 8.18. Пьер Безухов и комета 1812 года (рисунок Игоря Караша, источник: http://karashillustration.com/War-Peace-by-Leo-Tolstoy)

Возвращаясь к концу второго тома романа «Война и мир» с описанием Пьера Безухова, завороженно смотрящего на «параболическую» комету, можно вспомнить прекрасное стихотворение Андрея Вознесенского «Параболическая баллада» (https://rustih.ru/andrej-voznesenskij-parabolicheskaya-ballada), в которой есть такие строки:

Несутся искусство, любовь и история –
По параболической траектории!

Не по эллиптической или гиперболической, а именно по параболической! Здесь опять же, как в романе Толстого, гармония слов превалирует над алгеброй физики. На Вознесенского явно повлияли «параболические» строки из «Войны и мира».

Но наши споры о форме траектории кометы вблизи Солнца могут оказаться беспочвенными. Дело в том, что на комету, приближающуюся к Солнцу, могут действовать не только гравитационные силы, но и силы, связанные с радиационным давлением Солнца на комету, с процессом испарения ядра кометы и др.

Это может существенно исказить траекторию кометы, сделать ее не конической (эллипс-парабола-гипербола), а более сложной, более замысловатой.

Эллипс в переводе с древнегреческого – это опущение, нехватка, недостаток. Недостаток *эксцентриситета* до единицы (еще один математический термин, безусловно, понравившийся бы Толстому, – фр. excentricite, нем. exzentrizitat, лат. ex – из, вне + centrum – центр). У параболы, повторяем, эксцентриситет равен единице, у гиперболы он больше единицы, а у эллипса – меньше единицы, то есть имеет место его недостаток [20]. Толстой изучал древнегреческий язык и мог вникнуть в смысл слова «эллипс» не только с позиций математики, но и с позиций этимологии и филологии. Он должен быть знакомым и со словом *«эллипсис»*, которое в лингвистике означает намеренный пропуск слов (нехватку слов!), не существенных для смысла выражения (см. конец сноски 7 на стр. 48). Вот как упрекал себя Стива, брат Анны Карениной: *«Есть что-то тривиальное, пошлое в ухаживанье за своею гувернанткой. Но какая гувернантка! (Он живо вспомнил черные плутовские глаза m-lle Roland и ее улыбку.) Но ведь пока она была у нас в доме, я не позволял себе ничего»*. Пропущены после сло́ва «ничего» слова́ «предосудительного, аморального, плохого, греховного» и т.д. И не только это. Толстой пропустил саму историю m-lle Roland. Можно представить себе, что Стива увлекся ею, уволил ее, чтобы не согрешить в стенах дома, и снял квартиру для «романтических свиданий». Можно также предположить, что эту гувернантку Долли, жена Стивы, уволила, заподозрив неладное, но Стива отыскал ее и наконец-то соблазнил… Читателю дается свобода и удовольствие самому дописать историю некоторых персонажей Льва Толстого. Многие, например, дописывают судьбы героев «Войны и мира» во время и после декабрьского восстания 1825 года. Такое явление можно отметить и в математике. Самый яркий пример – Пьер Ферма (1601–1665), которого мы уже не раз упоминали, написал в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта свою знаменитую теорему, но не дал ее доказательства. После этого более 300 лет математики всего мира дописывали этот занимательный математический сюжет. Литература и математика имеют очень много подобных недоговоренностей (эллипсисов), открывающих простор для творчества.

Мы уже упоминали выше Булгакова с его биномом Ньютона и с Аннушкой, разлившей масло. А вот, что можно прочесть у Михаила Афанасьевича в «Белой гвардии»: *«“Войну и мир” читал… Вот, действительно, книга. До самого конца прочитал – и с удовольствием. А почему? Потому что писал не обормот какой-нибудь, а артиллерийский офицер»*. Как недоучившийся филолог и юрист, не вполне понимающий, что такое эллипс, стал артиллерийским офицером, – это разговор особый. Но то, что такой офицер априори должен знать азы баллистики с ее эллипсом, параболой и гиперболой, – это не вызывает никаких сомнений. И вообще, можно найти много общего между двумя великими русскими романами – «Война и мир» Толстого и «Белая гвардия» Булгакова. Но это тоже особый разговор (см. http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/wpwg.pdf).

Вот что можно прочесть о дифурах в одном интернет-словаре молодежного сленга: «Значение: дифференциальные уравнения, система или системы дифференциальных уравнений. Учебный курс по дифференциальным уравнениям, системам дифференциальных уравнений или по дифференциальному счислению вообще. Также соответствующий экзамен, лекция, курс лекций, задания и т.п. Примеры: “А еще эту задачку можно решить через дифуры”, “Народ, а кто у нас дифуры ведет?”, “Дифуры завтра сдавать, а у меня еще шпоры не писаны”». Слово «дифуры» появилось в студенческом и преподавательском сленге в незапамятные времена.

Если преподаватель видит в этом курсе только формально-схоластическую составляющую, то он быстро превращает дифуры в «орудие пытки» студентов. Ведь аналитическое решение даже самых простых дифференциальных уравнений требует знания более десятка специфических приемов и хороших навыков интегрирования (вспомним тут еще раз Толстого-Левина). Если же преподаватель глубоко понимает смысловую суть дифференциальных уравнений, тонко чувствует баланс между аналитическими методами теории дифференциальных уравнений и численными методами решения, то он легко вовлекает студентов в этот самый «физический» раздел математики.

Дифуры никак нельзя назвать выдумкой скучающих математиков. Дифуры – это наглядные, достоверные, проверенные временем методы и инструменты исследования окружающих нас реальных физических процессов, например прохождения тока по электрической цепи или радиоактивного распада, падения тела под действием силы тяжести или колебания маятника.

С элементами теории дифференциальных уравнений школьники встречаются практически на каждом уроке физики. Но только этот факт от них по традиции скрывают. Учителя физики считают, что для ученика полезнее просто заучить расчетную формулу, чем понять, откуда эта формула взялась – см. рис. 8.9, например. Учителя математики считают, что достаточно заставить ученика выучить определение производной и научить его вычислять производную, пользуясь формальными правилами и таблицами, и не обременяют себя обоснованием необходимости изучения школьниками этого непростого математического понятия. Здесь утаивание дифференциальных уравнений на школьных уроках математики в чем-то схоже с утаиванием сексуальных вопросов на уроках литературы (см. рис. 4.2 и 4.3). Мол, школьники еще малы, чтобы это изучать, чтобы в этом разбираться…

Раньше у учителей были оправдания – недостаток иллюстративного материала, труднодоступность компьютерных средств решения дифференциальных уравнений. Сейчас такие оправдания несостоятельны. Любые физические и математические явления, изучаемые в рамках школьной программы, без труда моделируются с помощью вычислительных пакетов с доступным и понятным пользовательским интерфейсом, хорошей плоской и трехмерной графикой и анимацией. Появление этих пакетов дало нам возможность легко ввести учащегося в сложный мир динамических процессов. И сделать это следует как можно раньше – еще в школе.

Когда-то автор проводил факультативные занятия по информатике в очень продвинутом московском лицее. В плане занятий помимо набора стандартных тем было и рассмотрение способов решения на компьютере (в среде математической программы

Mathcad) дифференциальных уравнений – этих самых дифуров. Директор лицея (кстати говоря, физик по образованию, а по совместительству – профессор кафедры физики одного престижного московского вуза) сказал, что на слова «дифференциальные уравнения» в средней школе негласно наложен запрет. Школьникам разобраться бы с алгебраическими уравнениями, а тут им еще подсовывают дифференциальные... Но когда этому директору было показано, какие уравнения будут рассматриваться на занятиях и как они будут решаться на компьютере, то он изменил свое мнение и выразил уверенность, что школьникам все это будет и интересно, и понятно, а главное, полезно. Причем почти всем ученикам, а не только продвинутым в математике и физике.

Закончить этот раздел книги и начать следующий лучше всего цитатой из «Исповеди» Толстого. *«Спрашивая у одной стороны человеческих знаний, я получал бесчисленное количество точных ответов о том, о чем я не спрашивал: о химическом составе звезд, о движении солнца к созвездию Геркулеса, о происхождении видов и человека, о формах бесконечно малых атомов, о колебании бесконечно малых невесомых частиц эфира; но ответ в этой области знаний на мой вопрос: в чем смысл моей жизни? – был один: ты – то, что ты называешь твоей жизнью, ты – временное, случайное сцепление частиц. Взаимное воздействие, изменение этих частиц производит в тебе то, что ты называешь твоею жизнью. Сцепление это продержится некоторое время: потом взаимодействие этих частиц прекратится – и прекратится то, что ты называешь жизнью, прекратятся и все твои вопросы. Ты – случайно слепившийся комочек чего-то. Комочек преет. Прение это комочек называет своею жизнью. Комочек расскочится – и кончится прение и все вопросы. Так отвечает ясная сторона знаний и ничего другого не может сказать, если она только строго следует своим основам»*.

Браки заключаются на небесах! Первым, кто это изрек, был предшественник Шекспира, ныне почти забытый Джон Лили (роман «Эвфуэс и его Англия» – 1580 год). В связи с этим можно дать иную трактовку данному разделу книги. Небесная механика – это не только раздел механики, но и что-то такое, движущееся на Небесах и влияющее на наши судьбы.

9. ЛИТЕРАТУРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Рассуждения Толстого в романе «Война и мир» о роли народных масс и личности в истории перекликаются с рис. 8.4.

Современные представления о веществе подразумевают, что атом – это тоже своеобразная «планета», вокруг которой вращаются спутники-электроны и «прочие кю-мюзоны». Траектории звезд, солнц, планет, спутников, астероидов, молекул, атомов, элементарных частиц и др. в принципе можно просчитать, применив к каждому объекту довольно простые физические законы. Рисунок 8.2 – это иллюстрация такого расчета всего лишь для трех элементов, а рисунок 8.4 – для восьми. Проблема в одном: на расчет реального количества таких элементов во Вселенной не хватит никаких вычислительных мощностей – теперешних и будущих. Да и методы расчетов еще далеки от совершенства. В [30] обсуждается старое философское размышление о том, что якобы дьявол обладает такими вычислительными мощностями, опираясь на «нечистую» численную (прикладную) математику. Поэтому-то он и способен предсказывать будущее. Не только он, но даже и его свита. Вспомним восклицание Коровьева: «Подумаешь, бином Ньютона!» – которое мы уже упоминали и которое предшествовало предсказанию судьбы несчастного булгаковского буфетчика из варьете. А трагический конец Берлиоза – не композитора, а советского литературного функционера («главного инженера человеческих душ» – см. сноску 22 на стр. 153) – предсказал сам Воланд. Бог же обладает средствами «чистой» математики – инструментами аналитического (символьного), а не численного решения задач. Нужных вычислительных средств для таких предсказаний, повторяем, у простых смертных нет и не предвидится, но рассчитывать свойства веществ, состоящих из молекул, атомов и элементарных частиц, при изменении давления и температуры, например, тем не менее необходимо. Выход из этого вычислительного тупика был найден через молекулярно-кинетическую теорию, предложенную Людвигом Больцманом (1844–1906). Да, поведение (траекторию и скорость) каждой молекулы вещества рассчитать невозможно, но некий характер массы людей, виноват, молекул (статистика – народные массы) предсказать можно. Есть избитая сентенция о глупой процедуре расчета средней температуры больных в больнице. Но определение среднестатистической температуры (скорости, энергии) молекул в веществе – это вполне разумное решение, предложенное Больцманом. Левин-Толстой, как мы уже упоминали выше, читал книгу Тиндаля о теплоте и сталкивался с интегральным исчислением, которое является основным математическим подспорьем классической термодинамики с ее загадочной энтропией. Отсюда можно предположить, что Толстой знал о теории Больцмана и о страстях, кипевших вокруг нее в среде ученых Европы, многие из которых (Освальд, например) вообще отрицали существование атома, считали его некой древнегреческой химерой.

Молекулярно-кинетическую теорию можно приложить и к обществоведению, что и пытался образно делать Толстой. Да, поведение каждого человека предсказать невозможно, но тем не менее человеческое общество со своей энтальпией и энтропией развивается по каким-то своим более-менее известным законам «войны и мира». Роль личности в истории можно уподобить некому катализатору, способному ускорять или замедлять те или иные исторические процессы, выводить их из неких метастабильных пересыщенных состояний. Европейское общество конца XVIII и начала XIX века было пересыщено энергией и идеями, что и вылилось в Наполеоновские войны, задевшие в 1812 году и Россию. Умозаключения Толстого на этот счет сейчас кажутся примитивными и наивными. Эти тексты можно читать только «для гигиенических целей». Так сам Толстой в «Анне Карениной» сказал о стариках, катавшихся на коньках в Зоологическом саду. Но нам интересен сам ход толстовских рассуждений с гениальной художественной подложкой. Более того, можно представить, как поднялись бы волосы на голове и бороде Толстого, узнай он об ужасных исторических событиях XX и начала XXI века. Но он, к счастью, до них не дожил, хотя Русско-японскую войну (катализатор первой русской революции) он застал.

Лев Толстой и Людвиг Больцман схожи внешне и внутренне. Оба в молодые и не очень молодые годы были гуляками, оба женились на молоденьких, оба наплодили кучу детишек, оба в зрелые годы носили окладистые бороды и оба, увы, закончили свою жизнь трагически. Больцман покончил жизнь самоубийством. Толстой же, как полагают многие, тоже фактически осуществил акт суицида, но не мгновенный, а растянутый на неделю. У обоих необычные могилы. У Толстого скромный холмик в лесу. У Больцмана на могильном камне выбита его знаменитая формула $S = k \ln W$, связывающая энтропию S термодинамического состояния с числом соответствующих микросостояний W (на памятнике выгравировано log (десятичный логарифм) вместо ln (натуральный логарифм), так как второй вариант написания появился лишь через 13 лет после смерти Больцмана). Кроме того, многие математики вполне обоснованно полагают, что есть только один натуральный логарифм, а десятичный логарифм – это некая временная конструкция, призванная облегчить ручные расчеты (вспомним логарифмическую линейку, которую мы уже упоминали). Параметр k в формуле Больцмана – это постоянная Больцмана, одна из нескольких фундаментальных постоянных (постоянная Планка, число Авогадро и др.), на которых базируется современная физика. Предтечей Больцмана в открытии молекулярно-кинетической теории был Максвелл (1831–1879). Вы будете смеяться, но он тоже носил окладистую бороду лопатой. Может, все дело в бороде?! Мы об этих бородах еще поговорим в конце книги.

Есть такой литературный и тоже «бородатый» анекдот.

– Кому это памятник?
– Толстому!
– Это тот, кто «Муму» написал?
– Нет, «Муму» Тургенев написал!
– А почему тогда памятник Толстому?

Физико-математический вариант этого анекдота таков.

– В честь кого названа эта константа?
– В честь Больцмана!
– Это тот, кто молекулярно-кинетическую теорию открыл?
– Нет, эту теорию Максвелл открыл!
– А почему тогда константа названа в честь Больцмана?

Насильственная смерть собачки Муму и уход ее хозяина Герасима от полусумасшедшей барыни были некими литературными предтечами окончания крепостного права в 1861 году. Но в России фактически было не крепостное право (рабство), а элементарное растянувшееся на века военное положение, связанное с центральным местонахождением России в Евразии. Без такого военного положения Россию разорвали бы в клочья. Рецидивом крепостного права, пардон, военного положения стало создание колхозов после передачи земли крестьянам и последующего краха идеи фермерства в Советской России. Николая Ростова, Константина Левина, Алексея Вронского да и самого Льва Толстого в этом отношении можно считать образцовыми (орденоносными) председателями колхозов, неустанно заботящимися и о выполнении плана сдачи государству зерна, молока, мяса, и о благосостоянии вверенных им колхозников, виноват, крестьян. Но отход от военного положения начался в 1762 году, когда Петр III издал Манифест о вольности дворянства. Еще один ключевой год в этом длительном, еще полностью не закончившемся историческом процессе – 1974-й, когда решили выдавать паспорта и колхозникам. А в 1993 году были отменены выездные визы и разрешена свободная выдача загранпаспортов.

Автор не устает напоминать своим американским коллегам, что в Новом Свете люди были абсолютно свободны, но потом стали отдавать некоторые свои права государству. В России же люди были полностью закабалены (военизированы), но потом государство стало оделять народ некоторыми правами. Мы идем к одной равновесной точке, но с разных сторон. Дистанция между нами постепенно уменьшается, но она по-прежнему остается причиной разногласий и периодических стычек. Еще одна из причин в том, что у нас и у них во власть, в силовые ведомства часто стали попадать неудачники и бездари с низкой социальной ответственностью, не нашедшие себя в бизнесе, науке, искусстве…

Вернемся от истории к бородам. В.И. Немирович-Данченко также носил окладистую бороду, которая считалась лучшей бородой Москвы. Он в 1937 году поставил на сцене МХАТ «Анну Каренину» с Тарасовой в роли Анны, Прудкиным в роли Вронского и Хмелевым в роли Каренина. Эту постановку многие по праву считают лучшей театральной инсценировкой романа Толстого «всех времен и народов».

10. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Раз уж мы добрались до «Воскресения», то в свете темы книги будет уместно привести такую цитату из этого романа: *«Сообразив, куда прежде, куда после ехать, чтоб не возвращаться, Нехлюдов прежде всего направился в сенат»*. Она затрагивает интересную комбинаторную оптимизационную задачу математики – задачу коммивояжера [17] (см. также http://www.math.uwaterloo.ca/tsp), которая заключается в поиске самого выгодного маршрута, проходящего через указанные места по одному разу. Нехлюдов в Петербурге оказался в роли такого «коммивояжера». Он обивал пороги государственных учреждений в надежде изменить приговор Катюше Масловой – жертвы похоти и подлости самого Нехлюдова (еще одно alter ego Толстого), а потом вдобавок и судебной ошибки.

На рис. 10.1 показаны три кадра авторской анимации простейшего решения такой задачи. В квадрате случайным образом отмечены 90 точек. Нужно все их обойти, руководствуясь жадным алгоритмом ближайшего соседа, – из очередной точки идем к ближайшей, если в ней еще не были, и так обходим все точки, возвращаясь к заданной исходной (Start).

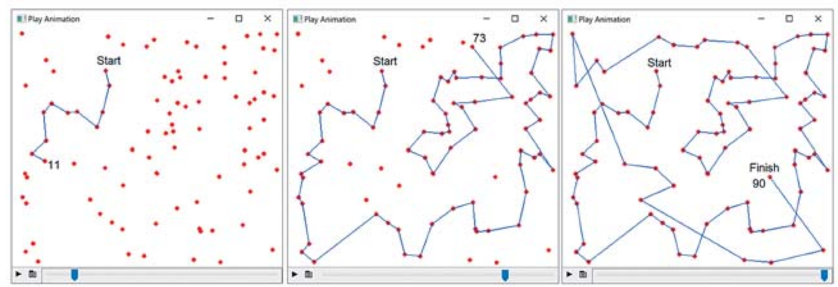


Рис. 10.1. Задача коммивояжера: три кадра анимации решения задачи коммивояжера методом ближайшего соседа

Алгоритм ближайшего соседа далеко не самый оптимальный, если учесть то, что задача коммивояжера подразумевает не только одноразовое посещение городов, но и минимизацию пройденного пути. Переход от 72-й точки к 73-й, например, замыкает петлю.

Отсюда вывод: из какой-то уже пройденной точки нужно было идти не к ближайшей, а свернуть к другой, более дальней точке, избегая тем самым возможных петель и сокращая общую длину пути. На рис. 10.2 показано более-менее оптимальное решение задачи коммивояжера для городов и населенных пунктов Италии, по которой Вронский и Анна много путешествовали.

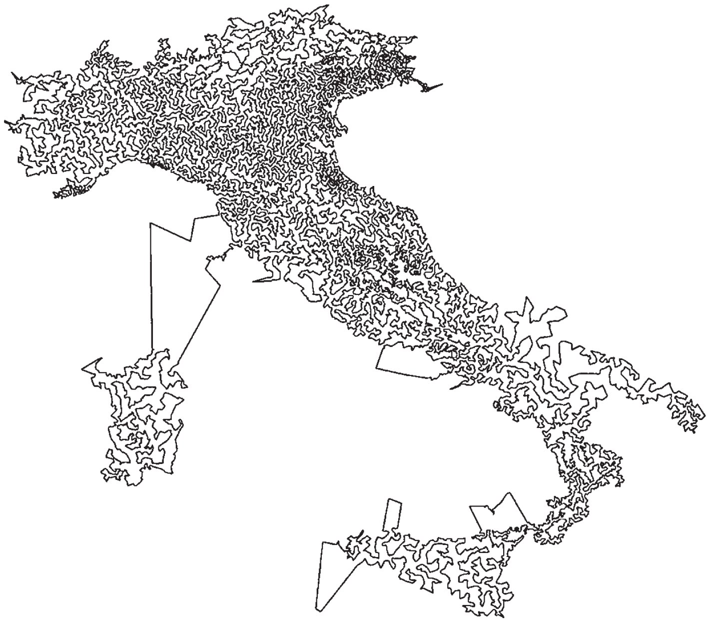


Рис. 10.2. Коммивояжер обходит все города Италии (см. также рис. 21.3)

Математики и программисты создали много более оптимальных алгоритмов решения этой задачи: алгоритм ветвей и границ, алгоритм отжига, алгоритм эластичной сети, генетический алгоритм, муравьиный алгоритм и др. Прилагательное «муравьиный» в контексте разговора о Толстом вызывает в памяти такие воспоминания Льва Николаевича о муравьином, вернее, муравейном братстве: *«…когда нам с братьями было – мне 5, Митеньке 6, Сереже 7 лет, объявил нам Николенька, что у него есть тайна, посредством которой, когда она откроется, все люди сделаются счастливыми, не будет ни болезней, никаких неприятностей, никто ни на кого не будет сердиться и все будут любить друг друга, все сделаются муравейными братьями»*. И дальше: *«Муравейное братство было открыто нам, но главная тайна о том, как сделать, чтобы все люди не знали никаких несчастий, никогда не ссорились и не сердились, а были бы постоянно счастливы, эта тайна была, как нам* <он> *говорил, написана им на зеленой палочке, и палочка эта зарыта у дороги, на краю оврага старого заказа…»* Здесь таятся вечные вопросы русской литературы и общественной мысли: «Кто виноват?» и «Что делать?». Когда-то давно считалось, что если людей накормить, то они станут счастливы. Но оказалось, что это не так. Потом предположили, что многие люди несчастливы и не понимают друг друга из-за недостатка информации. Сейчас, в век интернета, такого дефицита нет. Но мы, увы, не стали «муравейными братьями». Более того, мутные потоки информации, фейки в соцсетях еще больше рассорили и людей, и целые народы… Двойные стандарты в оценке тех или иных событий, увы, стали нормой. Вернее, так: люди чрезмерно злоупотребляют правилом «Правда – хорошо, а счастье лучше» (название одной из пьес Островского). Счастье одних людей и целых стран становится несчастьем других людей и других стран.

В основе муравейного, пардон, муравьиного алгоритма решения задачи коммивояжера лежит поведение муравьиной колонии – маркировка более удачных путей бо́льшим количеством феромонов. Сначала происходит размещение муравьев в городах, затем начинается движение муравьев – направление определяется вероятностным методом. В реальном мире муравьи (первоначально) ходят в случайном порядке и по нахождении корма возвращаются с ним в свою колонию, прокладывая феромонами тропы. Если другие муравьи находят такие тропы, они, вероятнее всего, пойдут по ним. Вместо того чтобы отслеживать цепочку, они укрепляют ее при возвращении, если в итоге находят источник питания. Со временем феромонная тропа начинает испаряться, тем самым уменьшая свою привлекательную силу. Чем больше времени требуется для прохождения пути до цели и обратно, тем сильнее испарится феромонная тропа. На коротком пути прохождение будет более быстрым, и, как следствие, плотность феромонов остается высокой. Испарение феромонов также имеет функцию исключения стремления к локально-оптимальному решению – по жадному алгоритму, например. Если бы феромоны не испарялись, то путь, выбранный первым, был бы самым привлекательным. В этом случае исследования пространственных решений были бы ограниченными. Таким образом, когда один муравей находит короткий путь от колонии до источника пищи, другие муравьи, скорее всего, пойдут по этому пути, и положительные отзывы в итоге приводят всех муравьев к одному, кратчайшему, пути (Википедия).

Стоит здесь упомянуть и генетический алгоритм решения задачи коммивояжера. Он использует методы, аналогичные естественному отбору в природе: наследование, мутация, кроссинговер (процесс обмена участками хромосом) и сам отбор. Здесь получается интересная взаимосвязь. Дело в том, что для раскрытия генетического кода живого организма необходимо решить довольно сложную задачу коммивояжера, а ее решение требует программы, работающей по генетическому алгоритму.

Поговорим о генетике в таком интересном аспекте.

Нигде в романе «Анна Каренина» не сказано четко и однозначно, что у Ани, дочери Анны отец именно Вронский, а не Каренин. Анна на даче в Петергофе сообщила Вронскому, что она беременна, но не уточнила, что именно от него. Можно, конечно, утверждать, что тут было некое умолчание, эллипсис, о котором мы уже писали. Но вполне вероятно допустить и то, что Анна, став любовницей Вронского, не прекратила интимных отношений с мужем хотя бы для того, чтобы у него не возникло ни малейших подозрений в ее измене. Лгать так лгать, *«сказала Анна, для которой ложь, чуждая ее природе, сделалась не только проста и естественна в обществе, но даже доставляла удовольствие»*. Допустимо также, что Каренин мог в какой-то момент взять Анну силой. Вспомним «Сагу о Форсайтах», связь которой с романом Толстого очевидна, и мы это уже отмечали. Сомс Форсайт изнасиловал свою жену Ирэн. Об этом она рассказала своему любовнику Филу Босини, который был этим так потрясен, что в лондонском тумане попал под кэб и погиб. Анна не любила свою дочь Ани. И Вронский был равнодушен к этой бедной милой девочке. Это наводит на мысль о том, что ее отцом был именно Каренин, а не Вронский, который в конце концов бросил Ани на руки Каренину и уехал погибать, виноват, воевать на Балканы.

Таких генетических тайн уйма в истории (наука), литературе (искусство) и даже в религии (в божественное зачатие Христа можно только верить, но это нельзя проверить; SAR – см. введение). Был ли Петр Великий отцом Ломоносова? Кто был отцом русского царя Ивана Грозного – Василий III или любовник Елены Глинской? А кто отец российского императора Павла Первого? Петр Третий, законный муж Екатерины Второй, или Салтыков, один из ее фаворитов? Неотъемлемая часть истории царской и императорской России – это история самозванства, связанная с невозможностью точного определения отцовства. Еще один пример из более близкой к нам истории. Говорят, что отцом первого президента Чехословакии Масарика был не муж его матери, а последний император Австро-Венгрии Франц Иосиф I. А вот еще один из многочисленных примеров из литературы. Кто был отцом Смердякова? Старший Карамазов или кто-то другой? Все эти вопросы сейчас довольно просто решаются с помощью генетического теста на отцовство (вспомним скандальную телепередачу «ДНК»). Сколько интриг в жизни, искусстве и даже в религии перестали бы быть интригами, если б можно было в старые времена определять по генам отцовство с высокой точностью, а не приближенно по косвенным признакам (цвет глаз и волос, внешняя схожесть, бурбонский нос и др.). Фильм «Брак по-итальянски», снятый по пьесе Эдуардо де Филиппо «Филумена Мартурано», может иметь такое продолжение (сиквел, как сейчас говорят). Герои фильма дожили до тех времен, когда можно сделать тест на отцовство. Оказалось, что Доменико Сориано не является отцом ни одного из трех сыновей Филумены… Сколько побочных детей было у самого Толстого? Достоверно известно только об одном, рожденном от замужней крестьянки (некий отголосок феодального права первой брачной ночи). Он работал кучером в Ясной Поляне и мозолил глаза Софье Андреевне.

Была ли Ада дочерью Лаврецкого – героя повести Тургенева «Дворянское гнездо»? Кстати, для этого произведения более подходящее название – «Грехи отцов». Тургенев вскользь касается очень больной для старой и новой России темы – нечестность судебной системы, всеобщее недоверие людей к судам. Лиза ушла в монастырь не только из-за Лаврецкого, но и из-за грехов своего покойного отца-прокурора. Кратко и точно эту вечную российскую «болячку» описывает такой диалог:

– Я открываю новое дело и хочу на этом хорошо заработать.

– Вы бизнесмен?

– Нет, я работаю в Следственном комитете.

Гоголевский судья даже не скрывал, что берет взятки.

В настоящее время в связи с развитием технологии суррогатного материнства встает вопрос и о генетическом тесте на материнство. Уже появляются литературные произведения с таким сюжетом.

Задача коммивояжера решается в рамках раздела математики под названием «теория графов». Граф – это не только титул Льва Толстого (см. сноску 18 на стр. 66), но и математический объект, состоящий из вершин и соединяющих их ребер (в английском языке такой путаницы нет: Graf – это титул и Graph – объект математики). Вершины графа – это города, а ребра графа – это дороги между городами, если иметь в виду задачу коммивояжера. Рассказывают, что когда-то давно готовилась к публикации книга по математике под названием «Графы и деревья» (дерево – это граф, не содержащий циклов). Когда работа над книгой подходила к концу, то стали думать о ее обложке. Художник издательства, не вникая в суть книги, а взглянув только на ее название, выбрал для обложки такую заготовку-фотографию (рис. 10.3). Книга была напечатана и… пошла под нож. Кто-то из ответственных за выпуск книги в самый последний момент ахнул, заметив, что на обложке оказался не тот граф и не те деревья. Это посчитали неуважением то ли к Толстому, то ли к математике, то ли к ним обоим. Книга была издана с другой обложкой.

Рис. 10.3. Макет обложки книги «Графы и деревья» (фото Владимира Черткова, 1908)

Теорию графов можно применить и к литературным произведениям. Вершина графа – это литературный персонаж, а ребра графа – это связь персонажей, их прямое знакомство (жали ли они друг другу руки). Ребра такого графа могут иметь вес. Прямое знакомство имеет высший вес, наличие общего знакомого при отсутствии личного контакта – это менее весомое ребро графа и т.д. Так, кстати, можно построить граф, отображающий всех людей планеты, если принять во внимание теорию пяти рукопожатий.

11. ЗАДАЧА О ПОГОНЕ

На фотографии (см. рис. 10.3) мы видим не только «графов и деревья», но и собак. Можно предположить (пофантазировать), что одну из собак звали Графом[19] (не «Граф и деревья», а «Графы и деревья»). Это обстоятельство, а также работа [17] позволяет нам «вбить» в тексты Толстого еще один «гвоздь Дюма» для еще одной «математической картины» – для *задачи о погоне*! А сцены охоты с собаками входят в число самых красивых и увлекательных мест романов Толстого, где показана эволюция этой старинной дворянской забавы[20]: в «Войне и мире» описана охота с гончими псами,

[19] В рассказе Чехова «Мальчики» упоминается собака по кличке Милорд. Можно предположить, что Чехов не назвал эту собаку более подходящей для собаки односложной кличкой Граф из уважения к Льву Николаевичу (см. сноски 18 и 22). Мостик между милордом и графом перекидывает жокей-англичанин, называвший графа Вронского милордом. А у Достоевского, повторяем, не было такого уважения к Толстому. Федор Михайлович назвал (обозвал?) своего князя Мышкина Львом Николаевичем. Это можно попытаться объяснить только тем, что во времена написания «Идиота» (1868) Толстой еще не был так авторитетен, как во времена написания «Мальчиков» (1887). Кстати, читая этот и другие рассказы Чехова, не перестаешь удивляться, почему Антон Павлович так и не написал ни одного романа. Описание семьи в этом рассказе могло спокойно вылиться в увлекательный роман о судьбе Володи, его друга (Монтигомо Ястребиный Коготь), трех сестер Володи, его родителей и тетки. В рассказе Чехова «Учитель словесности» (1889) есть конь с именем Граф Нулин (см. сноску 18 на стр. 66). Но это отсылка к Пушкину, а не к Толстому. Автор неслучайно в книге, посвященной математике, уделяет внимание именам персонажей Толстого и других писателей. Система правильных имен переменных, функций и других математических объектов очень помогает пониманию хода решения задачи. Перед текстами пьес помещают список действующих лиц, а перед описанием решения математической задачи, доказательством теоремы или перед инженерным расчетом – перечень переменных и функций. В интернете можно найти список персонажей романов Толстого, изучение которого – очень увлекательное и поучительное занятие.

[20] По романам «Анна Каренина» и «Воскресение» можно проследить и эволюцию отношения Толстого к церкви, в частности к религиозным обрядам (SAR – R, религия, см. введение). Для этого достаточно сравнить описания венчания Константина Левина с Кити Щербацкой и хода церковной службы в тюрьме, куда безвинно попала Катюша Маслова (Ярослав Гашек в таком ключе описал церковную службу в тюрьме, куда угодил Швейк). Заслуживает внимания и эпизод, когда Левин в ускоренном режиме с элементами бытовой коррупции прошел обряд говения перед венчанием с Кити. Русская православная церковь была и, увы, остается неким казенным заведением, со всеми «болячками» подобных заведений. Используя язык математики, можно сказать, что религия и церковь – это пересекающиеся, но несовпадающие множества. Степень такого несовпадения среди христианских церквей самая высокая у РПЦ, где обрядность, «лепота» храмов превалирует над духовностью, над проповедью. Такие невеселые мысли приходили автору в голову, когда он стоял у могилы Льва Николаевича в Ясной Поляне. У могилы, вырытой для Толстого за кладбищенской оградой. На кладбище этого писателя не разрешила хоронить и церковь, и он сам.

а в «Анне Карениной» – с подружейными собаками. Да и взаимоотношения Вронского и Анны после их знакомства в вагоне поезда на Николаевском вокзале Москвы и возвращения в Петербург тоже напоминают погоню. Вронский неустанно преследовал Анну: *«– Зачем я еду? – повторил он, глядя ей прямо в глаза. – Вы знаете, я еду для того, чтобы быть там, где вы, – сказал он, – я не могу иначе».*

В [15] изложены математические основы процесса погони собаки за зайцем. Три кадра анимации из [17] показаны на рис. 11.1.

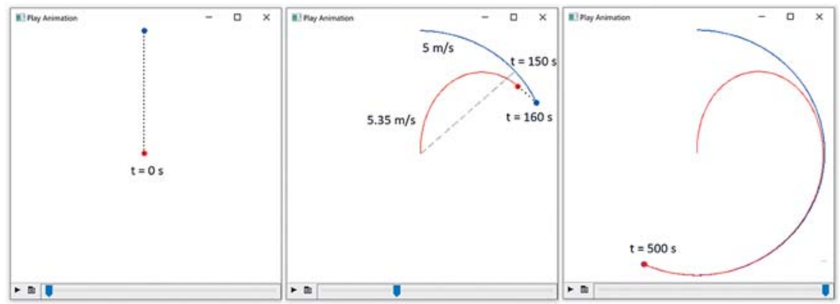


Рис. 11.1. Три кадра анимации бега собаки за зайцем

Заяц бежит по кругу, стартуя из его вершины (t = 0 секунд, левый кадр анимации на рис. 11.1). Это не живой, а тряпичный заяц, которого волочат по земле на веревке, привязанной к вращающейся консоли (своеобразный собачий фитнес). Одновременно со стартом зайца из центра круга пускают собаку:

«– Ату его, – послышался в это время протяжный крик одного из остановившихся борзятников. Он стоял на полубугре жнивья, подняв арапник, и еще раз повторил протяжно: – А-ту – его!» («Война и мир»). Скорость зайца 5 метров в секунду, а скорость собаки немного повыше – 5,35 метров в секунду (цифры условные). Как побежит собака? Как полетит истребитель, атакующий бомбардировщик? Как полетит ракета, пущенная к самолету или к другой ракете? Это очень актуальная математическая

задача в свете толстовской дилеммы «войны и мира». Простейший жадный алгоритм (см. рис. 11.1) таков: собака, опираясь только на свое зрение и отключив свой интеллект и свой нюх, бежит строго на зайца (см. короткий пунктир между двумя точками на центральном кадре и рис. 11.2), выписывая некую «горбатую» траекторию. На поимку зайца уйдет что-то около 500 секунд. Умная же собака, уловив характер бега зайца и оценив место их встречи, побежит строго по прямой, по радиусу круга бега зайца (см. длинную штрихованную линию на центральном кадре), затратив на поимку зверя намного меньше времени – 150 секунд. Вот как Толстой с любовью писал про умных и преданных собак: *«Старая Ласка, еще не совсем переварившая радость его* <Левина> *приезда и бегавшая, чтобы полаять на дворе, вернулась, махая хвостом и внося с собой запах воздуха, подошла к нему, подсунула голову под его руку, жалобно подвизгивая и требуя, чтоб он поласкал ее. – Только не говорит, – сказала Агафья Михайловна. – А пес… Ведь понимает же, что хозяин приехал и ему скучно»* («Анна Каренина»).

Рисунок 11.1 можно интерпретировать и так. Анна Каренина (жертва) после возвращения из Москвы в Петербург возвращается и на «круги своя» встреч и развлечений (Толстой описал три таких круга – деловой по службе мужа, светский и полусветский), а Алексей Вронский (хищник) начинает преследовать ее до тех пор, пока… *«То, что почти целый год для Вронского составляло исключительно одно желанье его жизни, заменившее ему все прежние желания; то, что для Анны было невозможною, ужасною и тем более обворожительною мечтою счастия, – это желание было удовлетворено»*. Читаем Толстого дальше в подтверждение тезиса о жертве. *«Она, глядя на него, физически чувствовала свое унижение и ничего больше не могла говорить. Он же чувствовал то, что должен чувствовать убийца, когда видит тело, лишенное им жизни. Это тело, лишенное им жизни, была их любовь, первый период их любви»*. Истинно сказано: «Движение – все, цель – ничто!»

Но если б Вронский не был так настойчив, то его «погоня» за Анной могла бы иметь иное математическое и графическое толкование (рис. 11.2). Здесь отображен случай погони за зайцем, бегущим по кругу, когда скорость собаки меньше скорости зайца. Собака делает начальную петлю, как бы раздумывая о том, как бежать, а потом начинает перемещаться тоже по кругу, но меньшего диаметра, выдерживая стабильную дистанцию до «жертвы» и не доводя свои отношения с жертвой до критической развязки. Примерно так Вронский преследовал Кити в Москве: *«Он не знал, что его образ действий относительно Кити имеет определенное название, что это есть заманиванье барышень без намерения жениться…»*

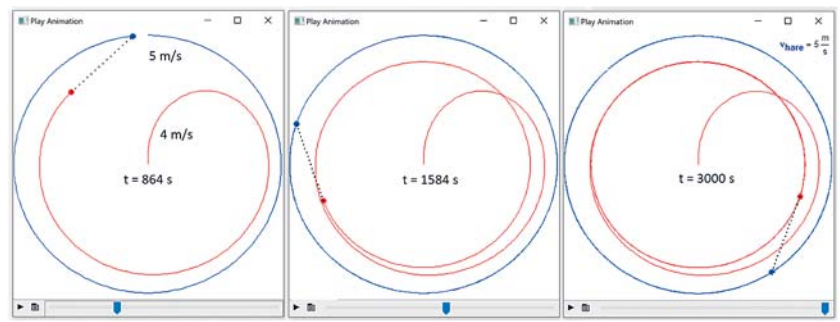


Рис. 11.2. Три кадра анимации бега собаки за зайцем, когда собака бежит медленнее зайца

На рис. 11.3 показано изменение во времени расстояния между хищником и жертвой при траекториях бега, стремящихся к двум концентрическим кругам (см. рис. 11.2). Эти круги сольются в один, если скорости бегущих будут равными. Диаметр внутреннего круга определить несложно, принимая во внимание тот факт, что при разных линейных скоростях хищника и жертвы их угловые скорости будут одинаковы. Сложнее рассчитать расстояние, какое установится между собакой и зайцем (новая интересная математическая задача).

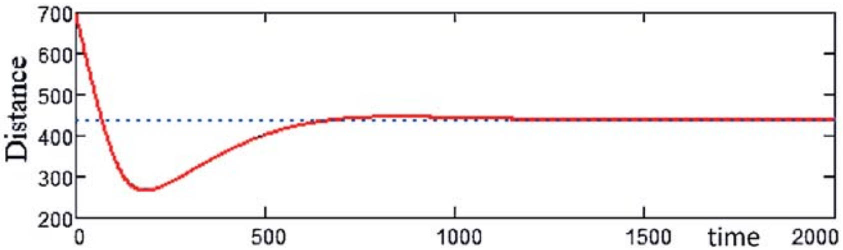


Рис. 11.3. Изменение во времени расстояния между зайцем и собакой (случай, показанный на рис. 11.2)

Рисунки 11.2 и 11.3 можно трактовать и в плане отношений Константина Левина и Кити Щербацкой. Точка минимума на рис. 11.3 (*t* равно примерно 200 секунд) – это первое неудавшееся сватовство Левина к Кити, а максимум при *t*, равном примерно 800 секунд, – второе удавшееся сватовство, о котором мы писали в разделе 3. После этого отношения Левина и Кити вышли на стабильный семейный уровень.

Для простейшего случая, когда заяц бежит строго по прямой (из начала координат вправо по горизонтали), а собака выбегает на зайца откуда-то сбоку (сверху), составлено дифференциальное уравнение (см. рис. 11.6, источник: *Pták P., Tkadlec J*. The Dog-and-Rabbit Chase Revisited // Acta Polytechnica. 1996. Vol. 36. P. 5–10), аналитическое решение которого дает траекторию бега собаки (Pursuit curve по-английски, die Hundekurve – собачья кривая по-немецки, Courbe du chien – по-французски). На рис. 11.4 эта кривая показана вместе с формулой, по которой она строится, где параметр *k* – это отношение скоростей зайца и собаки, а параметр *a* фиксирует их начальное взаиморасположение.

Новая интересная задача – составление дифференциального уравнения, описывающего погоню собаки за зайцем, бегущим не по прямой, а по окружности: составление и последующее аналитическое решение с получением формулы кривой погони, аналогичной той, какая показана на рис. 11.4. Такая задача была поставлена на форуме, адрес которого отмечен в этом разделе книги. Посетитель форума с ником Werner составил такое уравнение и решил его численно. Авторский же подход к решению задачи преследования состоит в том, что дифференциальное уравнение не составляется, а сразу численным методом по разностной схеме строится кривая погони [15]. Но составление и аналитическое решение дифференциальных уравнений – это некий математический высший пилотаж (интеллектуальная охота!), некая математическая высшая духовность, о которой будет сказано в разделе 15.

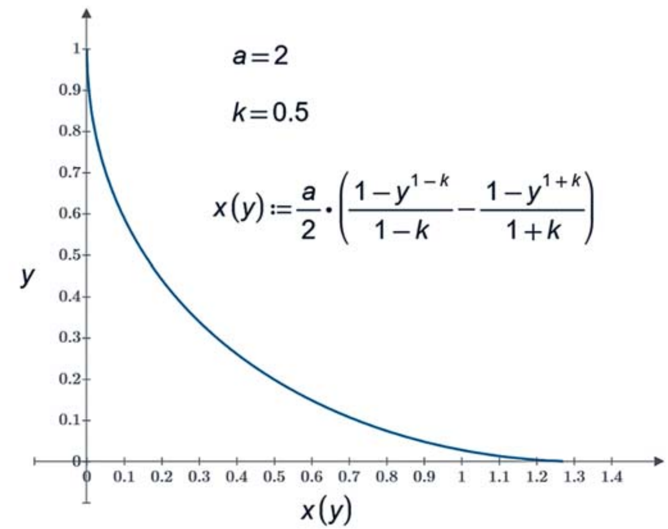


Рис. 11.4. Простейшая кривая погони

Авторский метод построения кривых погони [15] позволяет вырисовывать довольно сложные случаи. Один из примеров на рис. 11.5: заяц бежит по некой спирали (см. также рис. 13.9) со скоростью 3 метра в секунду, а сбоку (снизу) выскакивает собака со скоростью, гораздо меньшей заячьей (полметра в секунду – собака подкрадывается к зайцу). Тем не менее собака в конце концов догоняет зайца, имея одну неудавшуюся попытку в середине гонки (собачья петля на рис. 11.5).

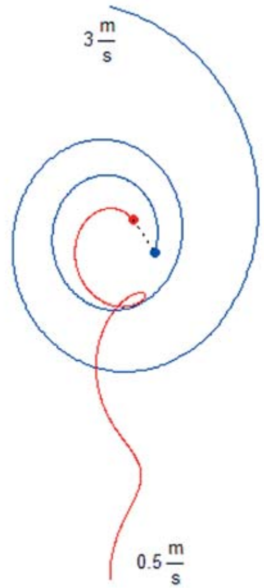


Рис. 11.5. Сложная кривая погони

Мы отметили, что бег собаки, показанный на рис. 11.1, далеко не оптимальный. Собаке нужно бежать не по горбатой кривой, а по прямой – на опережение (см. пунктирную прямую в центральном кадре анимации на рис. 11.1). Работать на опережение нужно и при ружейной охоте – целить не прямо в летящую птицу, а несколько вперед, прогнозируя ее полет. Это касается и управляемых зенитных ракет, у которых есть дополнительная возможность менять траекторию своего полета с опорой на «зрение, слух и нюх».

Кстати, о сценах охоты у Толстого, Тургенева и других классиков литературы. Сейчас мы наконец-то стали понимать, что убийство диких животных не для защиты, не для промысла, не для пропитания, а для забавы – это довольно подлое дело. Поэтому читать и перечитывать сцены охоты у «классиков» стало тяжело. *«Опять блеснула молния, и послышался удар; и, трепля крыльями, как бы стараясь удержаться на воздухе, птица остановилась, постояла мгновенье и тяжело шлепнулась о топкую землю»*. Теплую тушку этой

бедной птицы, принесенную собакой, охотник не выкинет, а положит в ягдташ, но не для того, чтобы потом почистить, сварить и съесть, а для того, чтобы похвастаться перед другими охотниками. Толстой вольно или невольно содрал ореол романтики не только с «большой охоты» – с войны, но и с «малой» (обычной) охоты.

Кстати, есть интересная математическая модель изменений в экосистеме «хищник – жертва». Она носит название модель Лотки-Вольтерры и сводится к составлению и решению системы двух несложных дифференциальных уравнений первого порядка: скорость изменения числа хищников (например, волков) имеет такой-то вид, а скорость изменения числа жертв (зайцев) имеет такой-то взаимосвязанный с числом волков и зайцев в лесу вид. Графическое отображение решения этой задачи представляет собой волны с периодическим изменением числа хищников и жертв. Подобные волны можно видеть на рис. 13.4. Гребень (максимум) такой заячьей волны имел в виду Ноздрев, когда говорил Чичикову: *«Вот на этом поле русаков такая гибель, что земли не видно; я сам своими руками поймал одного за задние ноги»*.

Если на одном графике отложить по оси X количество хищников, а по оси Y – количество жертв, то мы получим замкнутую кривую, подобную той, какая показана на рис. 13.8 (фазовый портрет). Увы, из-за охоты человека и по другим причинам часто такая, казалось бы, устойчивая экосистема сворачивается в спираль (см. рис. 13.9). Число хищников и/или жертв сначала падает так, что эти особи оказываются в «Красной книге», а потом их число уменьшается почти до нуля. Что мы и наблюдаем в живой природе. Один пример. Относительно недавно запретили планово отстреливать белых медведей. Так сейчас от них житья не стало в приполярных районах. Облонский однажды вошел в гостиничный номер Левина и увидел, как тот аршином мерил свежую медвежью шкуру. Правда, не белого, а бурого медведя. Друзья на мальчишнике отговаривали Левина от женитьбы и советовали «прыгнуть в окошко» и поехать на медвежью охоту в Тульскую губернию.

Но мы отвлеклись. Модель «хищник – жертва» интересна тем, что этих двух представителей фауны можно переставить местами, и ничего не изменится в математическом восприятии этого явления. Это же мы наблюдаем и в жизни. Хищник (агрессор) и жертва (тот, на кого направлена агрессия) часто меняются местами в оценках людей и СМИ: *«Ты виноват уж тем, что хочется мне кушать...»*. Страна становится жертвой из-за того, что военно-промышленному комплексу хочется кушать, а его акционерам – получать дивиденды.

На рис. 11.6 показана классная доска с дифференциальным уравнением, описывающим самый простой случай погони (см. рис. 11.4), которое пытаются решить деревенские дети с картины Н.П. Богданова-Бельского «Устный счет. В народной школе С.А. Рачинского» (уравнение взято из статьи: *Самоявчева М.В., Федоров Л.И.* Задача о погоне // Вестник Московского гос. обл. ун-та. Серия: Физика-Математика. 2011. № 1. С. 65–69). Задание на занятии может быть такое: не решить уравнение, а для начала определить, какое физическое явление оно описывает.

На рис. 11.6 автор заменил не только задание на доске, но и учителя. А новую картину можно назвать так: «Л.Н. Толстой в школе Ясной Поляны». Можно несколько переиначить не только картину Богданова-Бельского, но и один анекдот в стиле Даниила Хармса: *«Лев Толстой очень любил детей. Однажды он учил их весь день интегральному исчислению и проголодался. Пришел к жене. “Сонечка, – говорит, – ангельчик, сделай мне тюрьку”. Она возражает: “Левушка, ты же видишь, я наконец-то села править твою ‘Анну Каренину’. Ты там такого накосячил про эллипс!” “А-а! – возопил он, – так я и знал, что тебе мой литературно-математический фимиам дороже моего ‘Я’!” И костыль задрожал в его судорожно сжатой руке»*. Этот костыль можно увидеть на рис. 10.3.

«Тюрька», можно предположить, взята из сцены косьбы Левина с крестьянами:

«Старик накрошил в чашку хлеба, размял его стеблем ложки, налил воды из брусницы, еще разрезал хлеба и, посыпав солью, стал на восток молиться.

– Ну-ка, барин, моей тюрьки, – сказал он, присаживаясь на колени перед чашкой.

Тюрька была так вкусна, что Левин раздумал ехать домой обедать».

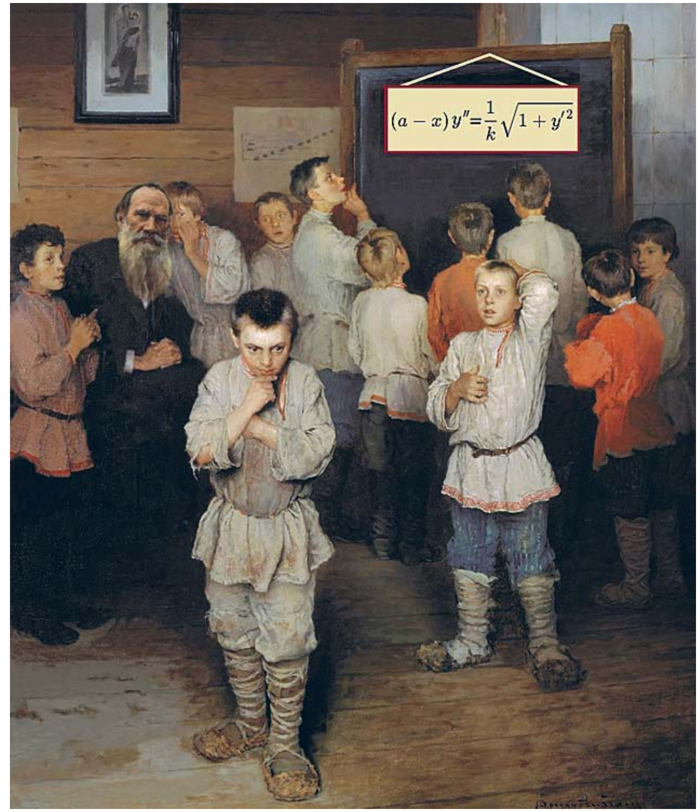


Рис. 11.6. Урок математики в сельской школе

Некоторые авторские анимации частных случаев погони хищника за жертвой можно увидеть здесь: https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Wolf-and-hare-one-old-problem-with-simple-Mathcad-solution/td-p/574235. Там же представлено дифференциальное уравнение погони за зайцем, бегущим по разным траекториям, а не только по прямой. В частности, на этом сайте можно увидеть такой экзотический случай, когда заяц бежит не по кругу (см. рис. 11.1 и 11.2), а по… кардиоиде – замкнутой кривой, напоминающей стилизованное сердце (червонная масть игральных карт; см. также рис. 13.10). Сердце у зайца сильно бьется в пятках!

Лев Николаевич, как мы уже отметили, был очень увлечен идеей народного образования, видел в этом спасение России. Споры об этом вели Андрей Болконский с Пьером Безуховым и Константин Левин со Стивой Облонским. Сцену, показанную на рис. 11.6, вполне можно было увидеть и в школе, организованной для крестьянских детей в Ясной Поляне. Поэтому-то мы и заменили учителя на картине. Такая интересная деталь: можно предположить, что мальчик шепчет на ухо Льву Николаевичу («стучит»), что Ванька (он на переднем плане с хитрым и опасливым выражением лица) притащил в школу смартфон, сейчас вытащит его из-под мышки и решит задачу аналитически (символьно). На рис. 11.7 показано, как сайт wolframalpha.com нашел общее решение дифференциального уравнения, представленного на рис. 11.6.

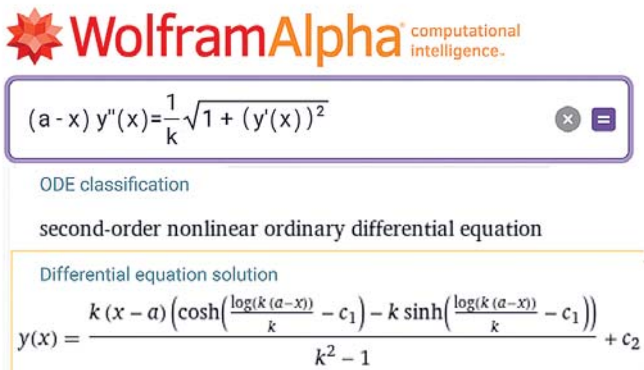


Рис. 11.7. Общее решение дифференциального уравнения, показанного на рис. 11.6, с помощью интернет-ресурса

В решении две константы c_1 и c_2, которые пропадут, если задать начальные условия – значения искомой функции $y(x)$ и ее первой производной в начальный момент времени. Если же дополнительно задать численные значения коэффициентов a и k, то сайт wolframalpha.com выдаст частное решение дифференциального уравнения и нарисует два графика – саму кривую погони $y(x)$ и параметрический график зависимости скорости собаки $y'(x)$ от пройденного пути $y(x)$ (рис. 11.8).

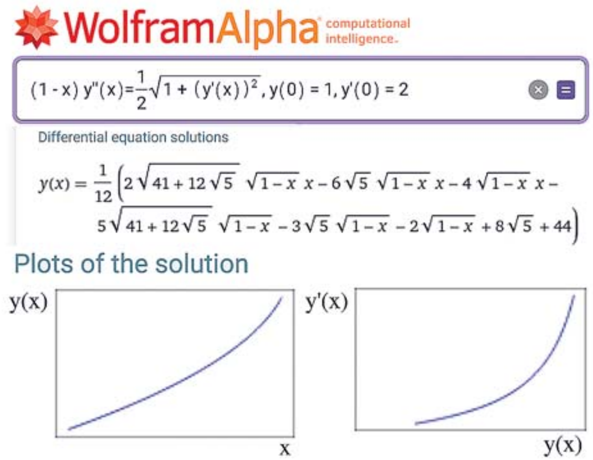


Рис. 11.8. Частное решение дифференциального уравнения, показанного на рис. 11.6, с помощью интернет-ресурса

Сейчас во всем мире спорят о месте калькуляторов и компьютеров на уроках математики, и мы этого вопроса уже коснулись выше. Можно представить себе (помечтать), что в классе доска не обычная, а электронная с возможностью решать уравнения, строить графики и др., а мальчики одеты в современную одежду. И девочки там наконец-то появились.

История развития методов решения задач по математике, физике, химии в школе и вузе – это, помимо прочего, и история борьбы с… вычислительными средствами. Сначала (на уроках устного счета, например, – см. выше) запрещали пользоваться ручкой и бумагой, затем (при изучении счета столбиком) – калькулятором и наконец при решении более сложных задач – компьютером с современными математическими программами, о которых мы уже упоминали: Mathematica, Maple, Mathcad, SMath и др. Вернее, прямо не запрещали и не запрещают, а говорили и говорят, что, мол, решение на компьютере школьной или вузовской задачи по математике равносильно решению задачи для устного счета (65 помножить на 9, например) на калькуляторе. Этот запрет касается не самих вычислительных средств, которые можно и нужно осваивать с помощью специально подобранных примеров на занятиях по технологии STEM, а применения этих компьютерных инструментов для решения задач, придуманных для уроков и семинарских занятий по арифметике, тригонометрии, линейной алгебре, математическому анализу… Но современные школьники и студенты этого не понимают. Более того, они уже не мыслят учебы, а иногда, к сожалению, и досуга без компьютера.

С устным счетом здесь все более-менее ясно. Эти упражнения – прекрасная гимнастика (фитнес) для ума. Использование на таких занятиях калькулятора равносильно дооборудованию спортивного тренажера… гидроусилителями. Счет столбиком также можно рассматривать как гимнастику для ума, дополненную хорошей моторикой рук. Но здесь подмешивается еще один довод. Считать в уме нужно уметь, если под рукой не окажется карандаша и бумаги, считать карандашом на бумаге нужно уметь, если под рукой не окажется калькулятора, и т.д. Но… добывать огонь трением «нужно уметь, если под рукой не окажется» спичек или зажигалки, определять стороны света по деревьям в лесу «нужно уметь, если под рукой не окажется» компаса или навигатора и т.д. и т.п. К сожалению или к счастью, с развитием цивилизации мы разучились считать в уме, добывать огонь трением, ориентироваться на местности по природным приметам и т.д. и т.п. Школьный учитель автора не уставал повторять на занятиях по арифметике, что если мы, его ученики, не научимся быстро и точно считать в уме или по крайней мере столбиком на бумаге, то нас будут обвешивать и обсчитывать в магазине и на рынке. Сейчас такая мотивация освоения устного счета уже не работает, так как в современных супермаркетах практикуют современные же методы «обвешивания и обсчитывания», а традиционный русский обман стали называть умным маркетинговым ходом.

За обедом немец – управляющий имением Вронского вытащил из кармана карандаш с записной книжкой и собрался было подсчитать экономическую целесообразность использования проволоки при уборке сена.

Противники использования современных компьютерных средств решения школьных и вузовских задач по математике, физике, химии и т.д. также опираются на ряд других доводов, про которые они, правда, открыто не говорят.

Во-первых и к сожалению, многие школьные учителя и преподаватели вузов просто-напросто не умеют работать с современными компьютерными математическими программами и/или не знают в полной мере про их возможности. Эти преподаватели освоили компьютер на уровне офисных программ (текстовый редактор, табличный процессор, электронная почта, работа в интернете) и азов операционной (файловой) системы, но дальше идти не хотят или не могут, оправдывая это и тем, что такие программы вредны для учащихся (см. выше).

Во-вторых, внедрение этих программ в учебный процесс требует кардинального пересмотра содержания и методов преподавания, а также переписывания учебников и задачников по математике, физике, химии или по крайней мере существенной их переработки. Примеры в задачниках, конечно, переписываются. Прежде, во времена Толстого, там были «пуды и аршины», а теперь – «килограммы и метры». Раньше в задаче было: «Землекоп выкопал столько-то метров канавы», а сейчас – «Компьютер имеет такой-то объем памяти», но суть задач и методика их решения при этом, увы, почти не изменились.

В-третьих, вышеупомянутые компьютерные программы довольно дороги. Их не в состоянии купить многие наши школы и вузы. Сказываются здесь и санкционные причины. Но эта проблема, сразу скажем, решаема. Фирмы-разработчики математических программ предоставляют учебным заведениям существенные скидки, а в ряде случаев передают программы бесплатно. Но с корыстной, конечно, целью. Учащиеся, освоив бесплатную программу, после окончания вуза купят ее сами или попросят об этом своего работодателя. Преподаватели должны не сетовать на дороговизну программ или на невозможность по разным причинам работать с пиратскими копиями, а искать пути решения этой проблемы, связываться, например, с разработчиками программ и их дилерами. Кроме того, нужно помнить, что есть и бесплатные урезанные версии программ (см. сноску 13 на стр. 55). Да и пиратские копии стали не такими уж черными – они посерели. Появился параллельный импорт. Надо же как-то выживать в условиях санкций.

На доске в классе (см. рис. 11.6) в оригинале картины, конечно, не висит табличка с дифференциальным уравнением второго порядка, а написана мелом такая дробь (рис. 11.9), которую мы подсчитали тоже с помощью вышеупомянутого сайта.

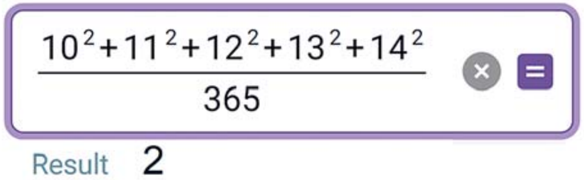


Рис. 11.9. Выражение для устного счета

Сможет ли читатель сосчитать в уме, без компьютера или калькулятора, чему равно это выражение? В «Анне Карениной» есть интересная сцена, когда Алексей Вронский считал столбиком или на счетах – сводил дебет с кредитом своих финансов, полагая при этом, что карточному шулеру заплатить надо, а портной подождет. Таково было офицерское представление о честности. В продолжении темы можно отметить, что у Тургенева в «Вешних водах» только портной пришел на вокзал проводить героя повести в надежде получить долг.

Можно пофантазировать и сказать, что симпатичный мальчик у доски на самом правом краю картины на рис. 11.6 – это Филипок из знаменитого рассказа Толстого.

«Был мальчик, звали его Филипп.

Пошли раз все ребята в школу. Филипп взял шапку и тоже собрался идти. Но мать сказала ему:

– Куда ты, Филипок, собрался?

– В школу.

– Ты еще мал, не ходи. Тем более там сегодня решают дифференциальные уравнения, а ты еще до них не дорос.

И мать оставила его дома».

Но Филипок все же пошел в школу без спроса.

«Когда Филипок шел по своей слободе, собаки не трогали его, они его знали. Но когда он вышел к чужим дворам, выскочила Жучка, залаяла, а за Жучкой большая собака Волчок. Филипок бросился бежать, собака тоже за ним». На снегу остались собачьи следы погони. Когда Филипок добрался до школы, отдышался и рассказал всем о собаках, то было решено описать языком математики погоню собак за Филипком…

Занимательную историю, связанную с физикой и математикой, можно придумать о каждом мальчике, изображенном на рис. 11.6. О каждом в отдельности или обо всех сразу. Вот пример. Мальчики после школы пошли кататься на санках с горки. У этой горки есть разные склоны с разным профилем – прямым, слегка изогнутым, сильно изогнутым с ямкой вблизи финиша и т.д. (рис. 11.10). По какому склону быстрее всего можно скатиться с горки?

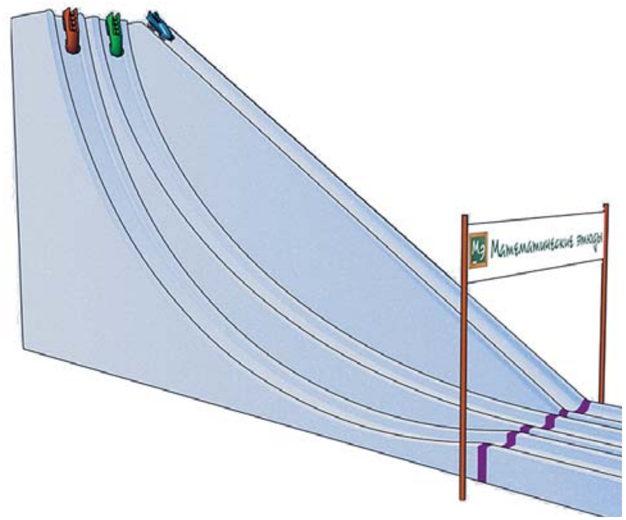


Рис. 11.10. Скатывание с горки по разным профилям (источник: https://etudes.ru/etudes/cycloid/7)

Дети могут на горке провести реальные эксперименты, скатываясь по разным маршрутам и оценивая время, а на следующий день разобрать в классе эту задачу, используя вариационное исчисление, и доказать, что самая быстрая кривая скатывания – это циклоида, кривая, какую выписывает точка на ободе катящегося колеса. Дуга циклоиды показана на переднем плане рис. 11.10. Далее идет парабола, а за ней – отрезок прямой.

Лев Николаевич не только построил в Ясной Поляне школу для крестьянских детей, но и писал для них учебные пособия по обучению чтению, письму и арифметике. Вот одна примечательная задача из «Азбуки» Толстого, связанная с погоней: *«Мужик вышел пешком из Тулы в Москву в 5 часов утра. В 12 часов выехал барин из Тулы в Москву. Мужик идет 5 верст в каждый час, а барин едет 11 верст в каждый час. На какой версте барин догонит мужика?»*

Подобные задачи раньше и сейчас обычно решают пошагово с традиционными школьными действиями-вопросами. Вот так, например (методическое указание к решению самого Толстого):

1) Сколько времени шел мужик до момента выезда барина?
   12 часов – 5 часов = 7 часов.
2) Сколько верст прошел мужик до момента выезда барина?
   5 верст в час · 7 часов = 35 верст.
3) Какова скорость сближения мужика и барина?
   11 верст в час – 5 верст в час = 6 верст в час.
4) Через какое время барин догонит мужика?
   35 верст : 6 верст в час = 5 часов и 50 минут.
5) На какой версте барин догонит мужика?
   5 часов и 50 минут · 11 верст в час = 64 версты с «хвостиком».
   Ответ: на 65-й версте.

Но задачу можно решить намного проще (вспомним пословицу «Простота хуже воровства!») через составление алгебраического уравнения с последующим его решением вручную или на компьютере (рис. 11.11), обозначив при этом искомую величину (расстояние, преодоленное барином и мужиком до их встречи) через *x*. А уравнение это вытекает из того, что мужик был в пути до встречи с барином на семь часов дольше. Время в пути – это расстояние, деленное на скорость. Обе скорости в нашей задаче постоянные. Если б это было не так, то пришлось бы прибегнуть к интегральному исчислению, о котором много сказано в этой книге.

a)

$$\frac{x}{5\ \frac{\text{верст}}{\text{час}}}-\frac{x}{11\ \frac{\text{верст}}{\text{час}}}=12\ \text{час}-5\ \text{час}\xrightarrow{solve,\,x}\frac{385\cdot\text{верст}}{6}\xrightarrow{float,\,5}64.167\ \text{верст}$$

b)

$$\frac{x\cdot 11}{5\cdot 11}-\frac{x\cdot 5}{11\cdot 5}=7 \qquad \frac{(11-5)\cdot x}{11\cdot 5}=7 \qquad x=\frac{7\cdot 11\cdot 5}{11-5} \qquad x=\frac{385}{6}=64\ \frac{1}{6}$$

В версте 500 саженей, в сажени 3 аршина $\quad \frac{500}{6}=83\ \frac{1}{3}$

Ответ: на 64-й версте (64 версты, 83 сажени и один аршин)

c)

$$\frac{x}{5\ \frac{\text{верст}}{\text{час}}}-\frac{x}{12\ \frac{\text{верст}}{\text{час}}}=12\ \text{час}-5\ \text{час}\xrightarrow{solve,\,x}60\ \text{верст}$$

d)

$$\frac{x}{v_{\text{мужика}}}-\frac{x}{v_{\text{барина}}}=\Delta t\xrightarrow{solve,\,x}\frac{v_{\text{барина}}\cdot v_{\text{мужика}}}{v_{\text{барина}}-v_{\text{мужика}}}\cdot\Delta t$$

Рис. 11.11. Решение задачи о мужике и барине:
a) компьютерное решение уравнения; b) ручное решение уравнения;
c) компьютерное решение подправленной задачи;
d) вывод формулы, по которой решается задача

В пункте а на рис. 11.11 составленное уравнение решается с помощью оператора solve, который выдал ответ в виде простой (обыкновенной) дроби. Оператор float перевел эту дробь в десятичную с пятью значащими цифрами. В пункте b показано решение задачи в ручном режиме с вычитанием простых дробей (см. также рис. 2.1) и переносом некоторых элементов уравнения в правую его часть. Если вспомнить соотношения между верстой, саженью (см. рис. 4.4) и аршином (см. сноску 27 на стр. 160), то несложно показать, что мужик и барин до своей встречи отмахали ровно 64 версты, 86 саженей и один аршин (64 версты «с хвостиком»).

В задаче о барине, догоняющем мужика, видится знаменитый парадокс Зенона, которого мы коснемся в разделе 18.

Кстати, об округлении численных ответов. Первый автор, как уже было сказано, теплотехник по образованию. Его студенты делают расчеты, где можно увидеть полученную температуру с точностью до тысячных долей градуса. Так, мол, компьютер подсчитал. Это похоже на то, как если б врач записал в истории болезни, что температура больного не 37,5, а 37,487. В «Анне Карениной» есть такой текст: *«Хозяйка за чаем только что говорила ему* <Левину>*, что они нынче летом приглашали из Москвы немца, знатока бухгалтерии, который за пятьсот рублей вознаграждения учел их хозяйство и нашел, что оно приносит убытка три тысячи с чем-то рублей. Она не помнила именно сколько, но, кажется, немец высчитал до четверти копейки»*. Сейчас бы мы назвали этого немца аудитором и тоже бы усмехнулись, глядя на его отчет.

Одна из причин расхождений в ручных и компьютерных расчетах состоит в том, что при ручных расчетах числа из промежуточных результатов счета по формулам переносятся в последующие формулы с довольно грубым округлением (две-три цифры после запятой), а при компьютерных расчетах – более точно (15 и более цифр).

Приближенное значение числа e, которое объединяет Толстого и Эйлера (см. ниже), обычно записывают с двумя знаками после запятой: $e = 2{,}72$. Это одна из базовых констант математики, которая хранит, как мы уже отметили, год рождения Толстого $e = 2{,}71828$. А для того чтобы этот факт лучше запомнили, год сразу повторяют: $e = 2{,}718281828$. Мы можем переписать (зашифровать – см. раздел 3) книги Льва Толстого, используя вместо букв цифры. И никто не опровергнет такое утверждение: если высчитывать все больше и больше знаков у числа e, то окажется, что там будет записан в числовом виде ну не роман, а какой-нибудь короткий рассказ Льва Толстого. Бесспорным будет и другое подобное утверждение: при взрыве мраморной глыбы среди осколков может оказаться… Венера Милосская, и вдобавок с целыми руками. Все это нельзя доказать или опровергнуть – во все это можно только верить. Вот он, типичный сгусток науки (математики), искусства (литературы) и религии (веры), о котором писалось во введении.

В числе π, которое тоже обычно записывают с двумя знаками после запятой: $\pi = 3{,}14$, – толстовское число 1828 первый раз появляется где-то после двенадцати тысяч знаков. Можно, конечно, подсчитать абсолютно точно, на каком знаке в числе π появится Лев Толстой, но – см. выше.

Задачу о барине, догоняющем мужика, можно упростить для счета (но не для общего решения пошагово или через уравнение), если принять, что скорость барина в коляске была не 11, а 12 верст в час, – см. пункт c на рис. 11.11. При этом в задаче появится некая внутренняя числовая симметрия: 5 часов и 12 часов, 5 верст в час и 12 верст в час. Но смеем предположить, что Толстой уменьшил скорость барина до 11 верст в час, чтобы ученики, решая задачу, заодно поупражнялись бы и с дробями. Хотя традиционно в подобных задачах дроби исключаются и работают только с целыми числами. Для этого же (упрощение ручного счета) на современных уроках физики рекомендуют принимать ускорение свободного падения не за 9,8, а ровно за 10 метров, деленных на секунду в квадрате. Критики такого упрощения говорят с ехидцей, что на уроках математики числа π и e можно было бы округлить до трех.

Задача о мужике и барине хороша еще и тем, что в школе на ее примере можно просто и естественно осуществить переход от арифметики (оперирование числами, простыми и дробными) к алгебре (оперирование символами). В пункте d на рис. 11.11 оператор solve выводит формулу, по которой одним действием можно решить задачу о мужике и барине. Для этого достаточно подставить в формулу численные значения двух скоростей и временной разницы. Переход от арифметики к алгебре – это очень важный этап в изучении математики. Этот переход трудно дается некоторым людям с гуманитарным складом ума.

На рис. 16.4 ниже показано решение задачи о периоде колебания маятника тоже с использованием готовой формулы. Но можно составить дифференциальное уравнение колебания маятника, решить его с получением нужной формулы, а потом уже работать с ней.

Несложно рассчитать, сколько будут в пути барин и мужик, если они двигаются из Тулы в Москву без остановок и с постоянной скоростью. Но такие путешествия вряд ли возможны. И барину с лошадьми, и пешему мужику нужно передохнуть в дороге. От Тулы до Москвы почти 200 верст! А вот Тверь находится поближе к Москве – примерно в 160 верстах. Читаем в романе «Война и мир»: *«Ба-*

лага был известный троечный ямщик, уже лет шесть знавший Долохова и Анатоля и служивший им своими тройками. Не раз он, когда полк Анатоля стоял в Твери, с вечера увозил его из Твери, к рассвету доставлял в Москву и увозил на другой день ночью». Но и в таких поездках приходилось менять лошадей. Читаем далее: *«– Уж лошади ж были! – продолжал рассказ Балага. – Я тогда молодых пристяжных к каурому запрег, – обратился он к Долохову, – так веришь ли, Федор Иваныч, 60 верст звери летели; держать нельзя, руки закоченели, мороз был. Бросил вожжи, держи, мол, ваше сиятельство, сам, так в сани и повалился. Так ведь не то что погонять, до места держать нельзя. В три часа донесли черти. Издохла левая только»*. Несложно подсчитать скорость такой езды – 20 верст в час (примерно 21 километр в час). Сейчас для нас это очень медленная скорость передвижения, но тогда… *«И какой же русский не любит быстрой езды!»* Поражает последнее предложение в монологе Балаги. Вспоминается бедная Фру-Фру из «Анны Карениной». Какая-то нить связывает этих двух бедных животных… Гибель Фру-Фру можно считать предвестием гибели Анны Карениной. Гибель же безымянной «левой пристяжной» тоже можно связать со своеобразной гибелью Наташи Ростовой – прекращение существования тоненькой восторженной девочки, влюблявшейся в каждого смазливого молодого человека, и возникновение «плодовитой самки», к с трудом отпускавшей от себя самца-производителя. Без этой своеобразной «смерти» очень трудно проследить историю «падения» Наташи Ростовой. Она, например, в самую трудную минуту бросила свою мать, потерявшую сына и мужа и оставшуюся без средств к существованию. Николаю Ростову пришлось прервать свою успешную военную карьеру и в полунищете, под угрозой долговой ямы жить в маленькой московской квартире с деградирующей матерью и постылой Соней-пустоцветом.

Гибель животного как предтеча гибели человека описана и в «Саге о Форсайтах» (alter ego «Анны Карениной»). Смерть пса Балтазара предшествовала смерти Джолли Форсайта на англобурской войне.

Но вернемся к рис. 10.3. Изображение на фото можно трактовать и так: Лев Толстой с клюкой в руке шагает по аллеям Ясной Поляны, реализуя частный случай задачи коммивояжера: нужно пройтись

по всем аллеям парка, не побывав на них дважды. Собаки со своим нюхом помогают Льву Николаевичу сделать это, оставляя на аллеях свои следы-феромоны (закидывают на кусты и стволы деревьев заднюю ногу). Есть такая знаменитая математическая задача о семи мостах Кенигсберга, по которым нужно пройти только раз. Ее решил великий (величайший!) швейцарско-немецко-русский математик Леонард Эйлер. Для автора Эйлер – это Толстой в математике, а Толстой – это Эйлер в литературе. И имена у них схожи – Лев и Леонард (Leon Hard – храбрый лев). Эти два великих человека наконец-то встретились на страницах данной книги во время прогулок по мостам Кенигсберга и аллеям Ясной Поляны – на стыке никак не состыковывающихся Востока и Запада, на стыке двух великих, но неравных цивилизаций.

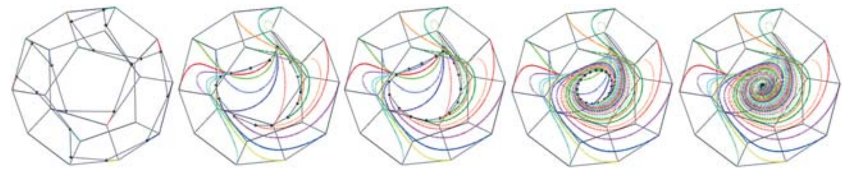


Рис. 11.12. Задача о 15 летучих мышах

Интересное расширение задачи о погоне – это так называемая задача о летучих мышах, по условию которой несколько мышей расположены в углах многоугольника (тетраэдра, октаэдра, додекаэдра и т.д.). Каждая мышь начинает лететь в направлении ближайшего соседа. Скорости у них одинаковые. Требуется построить траекторию движения мышей и определить момент времени, когда мыши встретятся – сойдутся в одной точке. На сайте https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Is-it-my-own-or-Mathcad-15-error/m-p/576164 показана реализация авторского подхода к решению этой задачи [15] с мировым рекордом в 15 летучих мышей – см. рис. 11.12.

12. ДУЭЛИ ОБЫЧНЫЕ И НЕОБЫЧНЫЕ

Персонажи Льва Толстого стреляли не только по дичи (см. выше), но и друг в друга. И не только на войне, но и в мирной жизни на дуэлях (рис. 12.1).

Рис. 12.1. Дуэль Пьера Безухова и Долохова (рисунок Игоря Караша, источник: http://karashillustration.com/War-Peace-by-Leo-Tolstoy)

Толстой в романе «Война и мир» подробно описал предысторию, ход и последствия дуэли Пьера Безухова с Долоховым. В «Анне Карениной» тема дуэли тоже затронута. Первая мысль Вронского после того, как Анна сказала ему, что призналась мужу в своей измене, была мысль о неизбежной дуэли с Карениным. Вронский должен бы был подвергнуть себя смертельной опасности: намеренно промахнуться и выдержать выстрел Каренина. Но муж Анны после долгих и мучительных раздумий отказался от дуэли.

Туровцев на обеде у Стивы Облонского бессознательно (по Фрейду) упрекнул Каренина в этом:

«– За что дрался Прячников?

– За жену. Молодцом поступил! Вызвал и убил!

– А! – равнодушно сказал Алексей Александрович и, подняв брови, прошел в гостиную».

Нехлюдов из «Воскресения» был готов драться на дуэли с мужем своей любовницы и стрелять в воздух. Попытку самоубийства Вронского можно трактовать и так. Вронский долго и мучительно ждал вызова Каренина и решил в конце концов прекратить эту неопределенность – выстрелить сам в себя (имитация выстрела Каренина). Этим Вронский как бы спасал свою довольно-таки сомнительную честь.

Толстой предусмотрительно только ранил, а не убил Вронского и утопил в Балтийском море безымянного родного брата Кити Щербацкой, иначе тот вызвал бы Вронского на дуэль, убил его и оба романа закончились бы, так и не начавшись. Да, быстро кончились бы оба романа – книга Толстого и собственно любовная интрига Анны с Вронским. Отец Кити, старый князь Щербацкий, сетовал на свой возраст, а то бы... *«Я – старик, но я бы поставил его на барьер, этого франта»*. Тема кровавой дуэли за честь родной сестры звучит в повести «Упырь», написанной тоже графом и тоже Толстым, но другим – Алексеем Константиновичем.

Вот такая необычная *односторонняя дуэль* «Вронский против Каренина», где за Каренина стреляет сам Вронский, описана в «Анне Карениной». А могла произойти в этом романе и гипотетическая *трехсторонняя дуэль*! (В интернете можно найти пьесу в трех действиях «Триэль», где описан словесный поединок персонажей: http://samlib.ru/c/chernyshow_s_p/triel.shtml)

Вронский, Каренин и Облонский решили стреляться, но не последовательно, а одновременно. Стива Облонский принимал деятельное участие в судьбе своей сестры Анны, разрываясь между Вронским и Карениным. Допустим, что Вронский как офицер стреляет безупречно – всегда попадает в цель на данной дистанции. Стива хороший стрелок – он поражает цель в 80 случаях из 100. Каренин же посредственный стрелок – его результативность 50 на 50. Дуэлянты (триэлянты) бросают жребий, кому стрелять первому, кому второму, а кому третьему, и стреляют до тех пор, пока в живых (или нераненым) останется кто-то один из троих. Очередной стреляющий вправе выбирать цель. Как пройдет такая дуэль? Кто имеет наивысшие шансы выйти из нее победителем? Такая дуэль, конечно, немыслима и в жизни, и даже в литературе, но описана в… математике [8, 13, 28] с одним интересным авторским решением этой необычной вероятностной задачи. Каким решением? – см. [8]. Заинтригуем читателя лишь тем, что в описанной дуэли наивысшие шансы остаться живым оказываются у… Каренина. Но он должен предварительно обдумать тактику ведения этой «триэли». У Стивы шансы немного хуже, а у Вронского, каким бы парадоксальным это ни казалось, дела совсем плохи.

Итак, повторим по пунктам условия дуэли. Вронский, Облонский и Каренин договорились сразиться на дуэли втроем по следующим правилам:

- жеребьевка определяет, кто стреляет первым, вторым и третьим;
- дуэлянты, точнее, триэлянты располагаются на одинаковых расстояниях друг от друга (по углам равностороннего треугольника);
- триэлянты обмениваются выстрелами по очереди, определенной жребием, пока двое не будут убиты;
- очередной стреляющий может стрелять в любого из живых или намеренно промахиваться (уступать свою очередь).

Повторяем, что Вронский – снайпер и никогда не промахивается на данной дистанции, Стива поражает мишень в 80% случаев, а Каренин – в 50%. Какова наилучшая стратегия для каждого из участников и каковы вероятности их выживания, если они следуют оптимальным стратегиям?

В этой дуэли у Вронского (снайпер) и Стивы (хороший стрелок) могут быть две тактики поведения: случайная, когда стреляющий ничего не знает о меткости соперников и целит в первого подвернувшегося – загадывает цель и мысленно подбрасывает монетку. Вторая тактика (бей в меткого), когда дуэлянту известно о том, кто как стреляет, и он метит в соперника с наивысшими стрелковыми качествами в надежде остаться tête-a-tête с наихудшим стрелком.

Каренин может следовать еще одной, третьей, «хитрой» тактике. Чтобы получить наивысшие шансы выйти победителем из дуэли, он должен намеренно стрелять мимо цели, пока двое его соперников живы. Ведь очередной стреляющий, если он будет придерживается тактики «бей в меткого», выстрелит не в Каренина, а в другого противника. После того как Вронский или Стива будет убит, Каренин должен показать все, на что он способен. В такой ситуации его шансы выжить составляют 50%, если он остался наедине с Вронским, и более 50% – если со Стивой. И в итоге шансы Каренина выжить будут выше, чем у Вронского и Стивы. Это и справедливо, так как Каренина жаль больше всех. Хотя многим он не нравится.

Но после жеребьевки шансы Вронского и Стивы резко меняются. Дела Стивы становятся совсем уж плохи, если Каренин после своего намеренного промаха передает право выстрела не Стиве, а Вронскому. И наоборот: Вронский может ухудшить свои шансы выжить, если после намеренного промаха Каренина Стива будет стрелять во Вронского. У Каренина же вероятность победы (примерно 52,2%) не зависит от очередности выстрелов.

Можно придумать и проанализировать четвертую тактику ведения дуэли: Стива и Каренин сговариваются целить во Вронского, убить его, раз он такой меткий и довольно неприятный для них, а уж потом выяснять отношения между собой. Инициатором такого сговора, как понимает читатель, скорее всего, будет Каренин. Стива же пойдет на сговор, если не смоделирует дуэль и не узнает, что из этого может выйти.

Необычный поединок описан и в «Саге о Форсайтах». Этот роман Голсуорси мы часто сопоставляем с «Анной Карениной». Джолли Форсайт вызывает Вэла Дарти на своеобразную дуэль – записаться добровольцем на англо-бурскую войну. Молодой Форсайт погиб в этом поединке, а Вэл был только ранен.

Но применять математические методы к оценкам исхода дуэлей так же бессмысленно, как применять эти методы к оценкам исхода примитивных азартных карточных игр или рулетки. Бессмысленно, но забавно и поучительно! Если хочешь выигрывать в казино – купи его.

13. ЖЕЛЕЗНАЯ ДОРОГА И ЛИТЕРАТУРА

Сопоставляя «Войну и мир» с «Анной Карениной», нельзя не заметить, как кардинально изменился способ перемещения героев этих двух романов на дальние расстояния, в частности из Петербурга в Москву и обратно. В начале XIX века и ранее это было целое путешествие с приключениями, во время которого можно было даже застрять где-то в пути, встретить кого-то, кто кардинально изменит вашу жизнь (Пьера Безухова, например, завербовали в масоны). Можно было даже написать целое литературное произведение – вспомним, например, Радищева. Но со второй половины XIX века такие путешествия стали обыденными. Эту железнодорожную революцию по отношению к литературному творчеству отметил Лесков в святочном рассказе «Жемчужное ожерелье» (https://www.litmir.me/br/?b=49516&p=1): *«…усматриваемое литературное оскудение прежде всего связано с размножением железных дорог, которые очень полезны торговле, но для художественной литературы вредны. “Теперь человек проезжает много, но скоро и безобидно, – говорил Писемский, – и оттого у него никаких сильных впечатлений не набирается, и наблюдать ему нечего и некогда – все скользит. Оттого и бедно. А бывало, как едешь из Москвы в Кострому ‘на долгих’, в общем тарантасе или ‘на сдаточных’, – да и ямщик-то тебе попадет подлец, да и соседи нахалы, да и постоялый дворник шельма, а ‘куфарка’ у него неопрятище, – так ведь сколько разнообразия насмотришься”»*. Рассказывают историю о том, как Толстой оказался свидетелем безобразного случая на одной железнодорожной станции, где офицер жестоко обругал и чуть ли не избил станционного буфетчика из-за булгаковской «осетрины второй свежести». Толстой возмутился, но мудро заметил, что если б не было таких горячих офицеров, то и поесть нельзя было бы в таких буфетах.

Полтора века назад и ранее (во времена действия романа «Война и мир») путешествие по свету могли позволить себе только очень богатые и физически здоровые люди. Но с появлением современных транспортных средств – железных дорог,

например, которым Толстой уделял большое внимание в своих произведениях, – такое удовольствие стало доступно «широким массам трудящихся», а не только избранным. Сел на поезд, в автомобиль или самолет – и за короткое время с комфортом добрался практически до любого уголка Земли. Если, конечно, нет визовых, карантинных и прочих ограничений. Бабуленька из «Игрока» Достоевского, лишенная ног, села в поезд и поехала из Москвы в Рулетенбург (город Баден-Баден), где свалилась на голову своим родственникам, ожидавшим ее смерти и получения наследства. Там она, по ее образному выражению, профершпилила (шпилен, zu spielen – играть по-немецки) на рулетке половину своего состояния. В работе [29] отмечается, что Достоевский негативно относился к математике потому, что она является базой технических наук, без которых не было бы и «вредных» железных дорог. А к ним Достоевский относился крайне негативно, хотя, безусловно, пользовался поездами во время своих путешествий по Европе. Толстой устами Левина тоже осуждал железные дороги, которые разоряют хозяйства многих помещиков: *«Он <Левин> доказывал, что бедность России происходит не только от неправильного распределения поземельной собственности и ложного направления, но что этому содействовали в последнее время ненормально привитая России внешняя цивилизация, в особенности пути сообщения, железные дороги, повлекшие за собою централизацию в городах, развитие роскоши и вследствие того, в ущерб земледелию, развитие фабричной промышленности, кредита и его спутника – биржевой игры»*. И далее: *«…железные дороги, вызванные не экономическою, но политическою необходимостью, были преждевременны и, вместо содействия земледелию, которого ожидали от них, опередив земледелие и вызвав развитие промышленности и кредита, остановили его, и что потому, так же как одностороннее и преждевременное развитие органа в животном помешало бы его общему развитию, так для общего развития богатства в России кредит, пути сообщения, усиление фабричной деятельности, несомненно необходимые в Европе, где они своевременны, у нас только сделали вред, отстранив главный очередной вопрос устройства земледелия»*.

Эти рассуждения о путешествиях можно приложить и к математике. Раньше в ее дебри могли забираться только избранные люди – люди с особыми математическими способностями (с особым «математическим слухом») и имеющие соответствующее математическое образование. А этого не было ни у Толстого, ни у героев его произведений. Но в настоящее время круг таких избранных существенно расширился за счет появления компьютерных математических программ, которые очень облегчают путешествие в мир математики. Правда и впечатлений от таких «поездок» может быть меньше, но…

Для чего изучают математику в школе и в вузе?

Во-первых, для того, чтобы можно было освоить другие учебные дисциплины: информатику, физику, химию, теоретическую механику, гидрогазодинамику, теорию машин и механизмов, сопротивление материалов, инженерную графику, экономику, маркетинг, финансовое дело и т.д. и т.п. Поэтому-то математику преподают в школе с младших классов и на первых курсах в вузе!

Во-вторых, математика – это наилучшая гимнастика (фитнес) для ума. Изучая математику, мы развиваем свои умственные способности (нейронные связи), которые пригодятся нам при решении не только чисто математических, но и производственных и житейских задач.

И в-третьих, изучение математики (путешествие в ее «дебри») – это само по себе интересное и увлекательное дело, которым можно заниматься в свое удовольствие (хобби!). Но без математических компьютерных пакетов простым людям это делать почти невозможно, если, повторяем, нет особых математических талантов и соответствующего математического образования. В настоящее время люди ездят на поездах и автомобилях, летают в самолетах в основном не по делу, а для удовольствия… Вот и автор этой книги, дилетант и в математике, и в литературоведении, совершил интересное путешествие в мир математики и литературы…

Но вернемся к началу этого раздела книги и обсудим вот такую тему.

Рассказывают, что Николай I перед строительством железной дороги Санкт-Петербург – Москва положил на карту линейку

и провел карандашом прямую линию между этими двумя столицами Российской империи. В районе Валдайской возвышенности карандаш наскочил на палец императора, и в этом месте дорога сделала небольшой крюк, о котором мы еще упомянем. Есть анекдот о том, почему ширина колеи железных дорог России оказалась больше европейской. Он тоже связан с Николаем I. Но этот анекдот слишком неприличен, чтобы помещать его в книге. Заинтригованный читатель при желании легко найдет его в интернете.

А вот еще один анекдот, но уже не исторический, а наших дней. Один человек сдавал в бухгалтерию отчет о командировке, в которой цена железнодорожного билета из Москвы в Петербург была несколько выше цены обратного билета. На вопрос бухгалтера, откуда взялась такая разница, подотчетное лицо посоветовало посмотреть на… глобус: из Москвы в Питер поезд поднимается вверх к Северному полюсу, а на обратном пути катится под горку к экватору…

Николай I для еще большего сокращения пути должен был не рисовать карандашом прямую линию на карте, а… просверлить в глобусе прямое отверстие, соединяющее Петербург с Москвой!

Шутки шутками, но уже давно обсуждаются полуфантастические проекты так называемого *гравитационного поезда*, катящегося без трения в прямолинейном подземном туннеле (рис. 13.1). Первую половину пути такой поезд будет разгоняться под горку без какой-либо тяги локомотива, а вторую половину пути будет по инерции подниматься вверх, замедляясь без тормозов до пункта назначения, где он на миг остановится и покатится назад. Вспомним проект Илона Маска под названием Hyperloop (гиперпетля)!

В интернете (а рисунок 13.1 взят именно оттуда) есть готовые формулы, по которым можно оценить, сколько времени такой поезд будет в пути и какой максимальной скорости он достигнет в середине туннеля. Но мы сейчас не будем считать по этим формулам, а проанализируем силы, действующие на гравитационный поезд, составим и решим дифференциальное уравнение баланса сил – получим функцию положения поезда в туннеле в зависимости от времени. Отказ от готовых формул позволит нам затем усложнить нашу математическую модель гравитационного поезда, приблизив ее к реальности через учет сил трения.

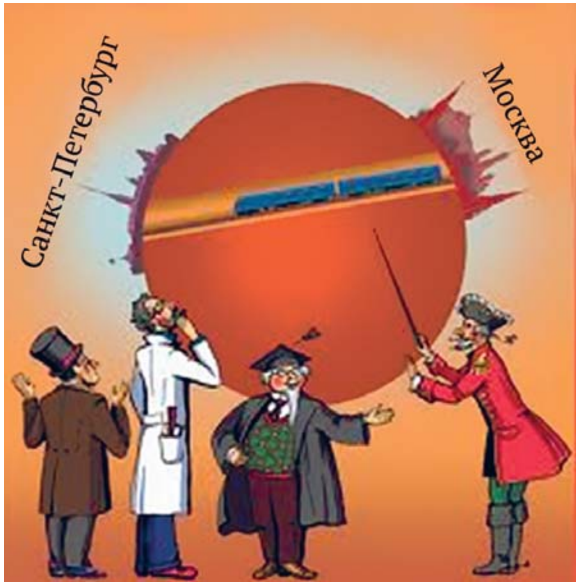


Рис. 13.1. Туннель между двумя российскими столицами

На рис. 13.2 представлена простейшая расчетная модель такого поезда: на планете Земля (идеальный шар с радиусом *R*) сделан прямолинейный туннель (красная линия – вспомним легендарный экспресс «Красная стрела») длиной *L*, по которому катится поезд. Начало декартовых координат, от которого будет вестись отсчет, мы поместили в центр Земли.

Несложно показать, что на наш поезд (на физическую материальную точку) вдоль координаты *x* будет действовать ускоряющая сила (первая половина пути) или тормозящая сила (вторая половина пути), равная весу тела ($m \cdot g$), умноженному на отношение значения координаты x к радиусу Земли – x/R. Положение точки (поезда) будет зависеть от времени – будет функцией $x(t)$. Если от нее взять первую производную $x'(t)$, то мы получим скорость поезда, а если вторую производную $x''(t)$ – то его ускорение. Дифференциальное уравнение [12] движения нашего гравитационного поезда будет иметь вид $m \cdot x''(t) = -m \cdot g \cdot x(t)/R$, вытекающий из второго закона Ньютона: сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на его ускорение. В уравнении мы не будем сокращать массу, чтобы сохранить физику задачи.

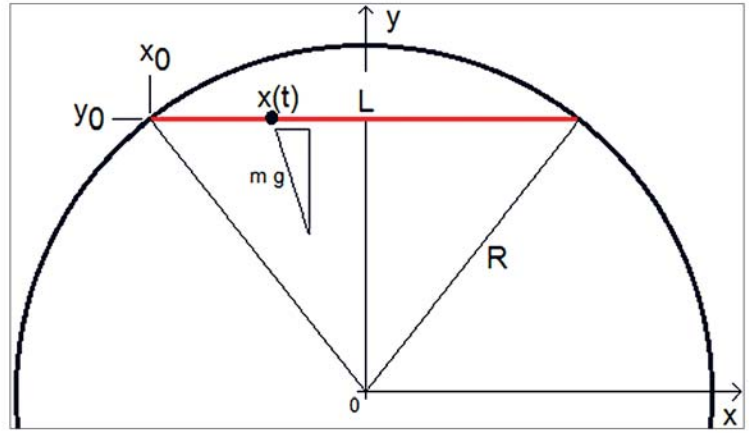


Рис. 13.2. Схема задачи о гравитационном поезде

На рис. 13.3 показано решение этого дифференциального уравнения с помощью сайта WolframAlpha.com. Введено не только само уравнение, но и отмечены начальное положение поезда $x(0) = -L/2$ (это Москва или Санкт-Петербург) и его нулевая начальная скорость $x'(0) = 0$.

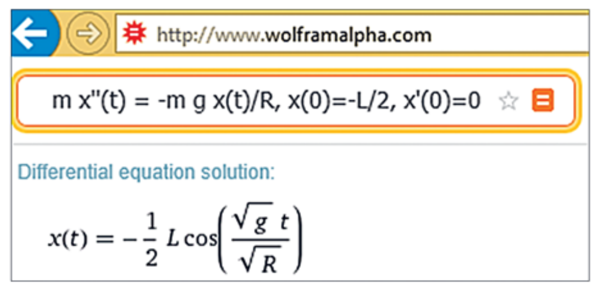


Рис. 13.3. Решение дифференциального уравнения движения гравитационного поезда

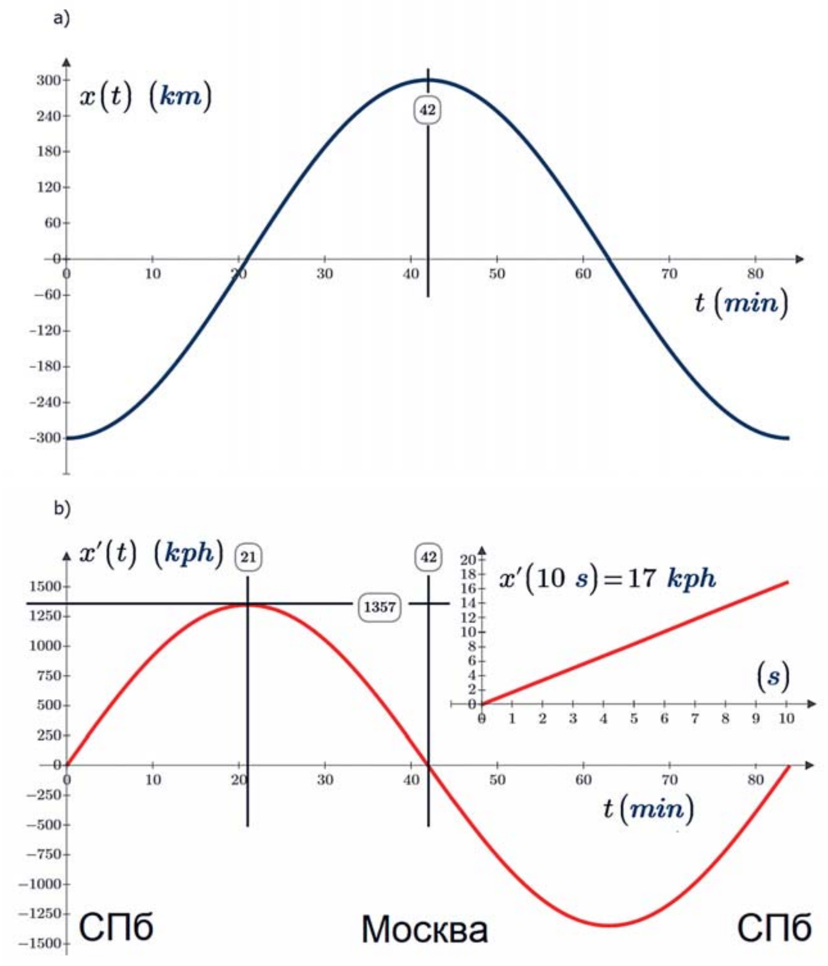


Рис. 13.4. Путь (a) и скорость (b) гравитационного поезда из Москвы в Петербург

На рис. 13.4 функция *x*(*t*), сгенерированная сайтом и показанная на рис. 13.3, и ее первая производная *x*'(*t*) (скорость) отображены графически. Наш фантастический поезд будет в пути примерно 42 минуты и достигнет в середине туннеля скорости (тоже

примерно) 1337 км/ч. Тут можно было бы сказать, что скорость поезда превысила скорость звука, но в нашем туннеле воздуха нет и, значит, нет и звука. А стартовать наш поезд будет примерно так, как стартует обычный поезд, – достигнет скорости 17 км/ч за десять секунд (см. график в нижнем графике на рис. 13.4b).

Наш поезд будет, подобно маятнику, совершать в туннеле колебательные движения от Петербурга к Москве и обратно с полупериодом (езда в один конец) примерно 42 минуты. И это время не зависит от расстояния между городами. Это расстояние будет влиять на скорость поезда: среднюю и максимальную в середине пути. В полном уравнении колебания маятника присутствует синус угла, который при малых углах заменяют самим углом и получают простые формулы, показанные на рис. 16.4 и 16.5. В уравнении гравитационного поезда синуса изначально нет, так как он движется по отрезку прямой, а не по дуге окружности, как маятник [3].

$$R := 6400\ km \qquad L := 600\ km$$

$$x_0 := -\frac{L}{2} \qquad y_0 := \sqrt{R^2 - x_0^{\,2}} = 6392.965\ km \qquad h := R - y_0 = 7.035\ km$$

$$x(t) := -\frac{1}{2} L \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t\right) \qquad t := \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = 42.299\ min$$

$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow \frac{L \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}}{2} \qquad v_{max} := \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} = 1336.9\ kph$$

Рис. 13.5. Расчет времени поездки на гравитационном поезде из Москвы в Петербург

На рис. 13.5 после ввода исходных данных (*R* и *L*) рассчитываются начальные координаты поезда x_0 и y_0 и максимальная глубина туннеля *h*, которая для трассы Москва – Петербург составит чуть больше семи километров. Это очень важный параметр. Дело в том, что в нашей математической модели ускорение свободного падения *g* принимается за константу 9,807 м/с^2. В более глубоких туннелях нужно будет учитывать изменение значения *g* в зависимости от глубины туннеля. А как меняется эта величина? Это отдельный вопрос. Если, например, туннель прокопать через центр Земли (а такие фантастические проекты тоже обсуждаются), то в середине шахты такого *гравитационного лифта* значение ускорения свободного падения должно быть нулевым.

Неизвестно, что сложнее (и дороже) сделать – прорыть под землей длинный прямой туннель или создать в построенном туннеле глубокий вакуум, а также обеспечить движущийся в нем поезд идеальной подвеской без трения. Уравнение, показанное на рис. 13.3, можно дополнить силой сопротивления воздуха и силой трения качения колес о рельсы, приблизив тем самым наш гравитационный поезд к реальным условиям эксплуатации. Силу сопротивления воздуха обычно принимают пропорциональной плотности воздуха ρ, перемноженной на площадь поперечного сечения поезда S и квадрат его скорости $x'(t)$. Сила трения качения колес о рельсы с большими упрощениями принимается пропорциональной той составляющей веса поезда, которая параллельна оси y (сила давления поезда на рельсы). Такое расширенное дифференциальное уравнение уже нельзя будет решить аналитически (абсолютно точно) и получить формулу для функции $x(t)$, как это показано на рис. 13.3. Это усложненное уравнение можно будет решить только численно (приближенно) и получить таблицу значений функции $x(t)$ при разных значениях t. На рис. 13.6 показано, как это делается.

R	L	m	F	S	ρ	k	f	t_e
(km)	(km)	(tonne)	(kgf)	(m^2)	$\left(\frac{kg}{m^3}\right)$			(hr)
6400	600	15	121.2	3	1.25	0.02	0.00003	24

$$x_0 := -\frac{L}{2} = -300\ km$$

Решить

Решатель Ограничения

$$x(0\ s) = x_0 \qquad x'(0\ s) = 0\ kph$$

$$m \cdot x''(t) = F - m \cdot g \cdot \frac{x(t)}{R} - \left(k \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{x'(t)^2}{2} + f \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x(t)}{R}\right)^2}\right) \cdot sign(x'(t))$$

$$x := \mathbf{Odesolve}(x(t), t_e)$$

Рис. 13.6. Учет сил сопротивления при расчете движения гравитационного поезда

В задаче, показанной на рис. 13.6, дополнительно к значениям R и L введены: масса поезда m, сила тяги локомотива F, площадь поперечного сечения поезда S, плотность воздуха ρ, коэффициенты трения поезда о воздух k и о рельсы f, а также и значение времени t_e, до которого будет вестись табуляция функции $x(t)$. По умолчанию табуляция ведется по 1000 точкам, но при необходимости эту цифру можно изменить. Две силы трения перемножены на встроенную в Mathcad функцию-ступеньку sign, которая возвращает нуль, если ее аргумент равен нулю, минус единицу, если аргумент отрицателен, и единицу в противном случае. Это сделано для того, чтобы сила трения поезда о воздух всегда действовала против движения поезда, а сила трения колес о рельсы равнялась нулю при нулевой скорости поезда. При высоких скоростях поезд будет тормозиться в основном за счет силы встречного ветра, а при низких скоростях – за счет силы трения качения колес. Такое можно наблюдать у приземляющегося самолета: сначала он тормозится за счет тормозных щитков и/или тормозного парашюта, а потом к работе подключаются тормоза шасси. Из уравнения на рис. 13.6 можно убрать квадратный корень, так как для туннеля Москва – Петербург отношение $x(t)/R$ весьма мало. Но для более протяженных туннелей это отношение будет достаточно большим и его нельзя будет игнорировать. В более глубоких туннелях нужно будет также учитывать изменение плотности воздуха. В нашем же расчете она принята за константу – средней плотности воздуха на уровне моря.

Встроенная в Mathcad функция Odesolve численно решила (solve) наше обыкновенное дифференциальное уравнение (*e* – equation). Перед уравнением зафиксированы начальное положение поезда $x(0\ s) = x_0$ и его скорость $x'(0\ s) = 0$ kph (км/ч). От этой начальной точки до точки t_e функция Odesolve будет рассчитывать значения создаваемой функции $x(t)$, отображенной на графике рис. 13.7.

При учете сил трения и правильно выбранной силе тяги локомотива F (у нас это 121,2 килограмм-силы) поезд в туннеле благополучно доедет до конечной точки и покатится назад (если его не задержать, подложив, например, под его колеса тормозной башмак), повторяя движение затухающего маятника (рис. 13.7) с окончательной остановкой через двое суток, но не в середине туннеля, а где-то под Валдайской возвышенностью – там, где поезд под небольшим уклоном будет удерживаться силой тяги локомотива. Эту точку несложно рассчитать, что мы предлагаем сделать читателю, который при желании может и дальше усложнять нашу модель – ввести в нее учет изменения плотности воздуха, а также значения ускорения свободного падения в туннеле. Коэффициент k в формуле силы трения поезда о воздух также не является константой, а зависит от режима обтекания воздуха поезда – ламинарный при низких скоростях, переходный и турбулентный при высоких скоростях… Кроме того, нужно учитывать, что коэффициент k будет одним при движении поезда в открытом пространстве и другим при движении в туннеле. Коэффициент трения качения f также зависит от скорости поезда: в момент начала движения он может иметь одно (высокое) значение, а по мере нарастания скорости – другое, меньшее, что приводит к некоторым рывкам в движении. Все эти сведения можно почерпнуть в том же интернете и внести в нашу модель.

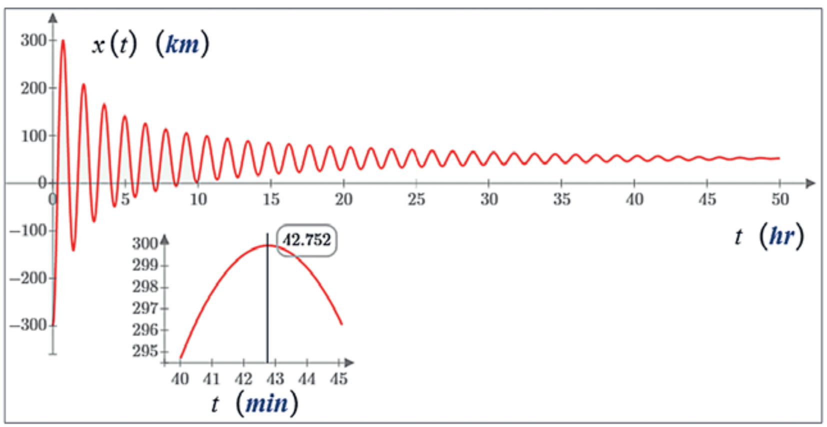


Рис. 13.7. График движения гравитационного поезда с учетом сил трения

Мы доказали и теоретически, и нашим численным экспериментом, что время движения гравитационного поезда не зависит от длины туннеля и равна этим самым 42 минутам, которые можно считать некой константой, характеризующей нашу планету и связанной с гравитационной постоянной и плотностью Земли. При иных длинах туннеля, как было отмечено ранее, будет меняться только скорость поезда – средняя и максимальная. В туннеле Москва – Петербург среднюю скорость легко оценить: 600 км / 42 мин = 857 км/ч. Это скорость пассажирского самолета.

Палец Николая I на линии Москва – Петербург (см. выше) – это не просто исторический анекдот. Это объезд реальным поездом реального большого и глубокого оврага, поперек которого проложили насыпь и мост только в 2000 году при реконструкции дороги (подробнее см. http://af1461.livejournal.com/212024.html). Кстати говоря, несложно подсчитать, что если железную дорогу между Москвой и Петербургом длиной 600 км проложить не на поверхности Земли (на поверхности идеального шара с радиусом 6400 км), а в туннеле строго по прямой (см. рис. 13.1 и 13.2), то расстояние между этими двумя городами сократилось бы всего лишь на… 220 метров.

Кстати, о реальных, а не о фантастических туннелях. Такие туннели, надо полагать, встречались Толстому по пути из Швейцарии в Италию и обратно во время путешествия по Европе. А знаете ли вы, по какой траектории строятся туннели, если нет особых ограничений?! Тут обычно отвечают: по прямой линии или по дуге окружности. Но это не так. В прямом туннеле будет скапливаться вода, и ее нужно будет непрерывно откачивать. Рисунок 13.7 можно интерпретировать и как график, описывающий перетекание лужи воды, вылитой у входа в такой прямолинейный туннель, где тяга локомотива заменена тягой ветра в туннеле. Дугообразный же туннель, повторяющий окружность Земли, прокладывать довольно сложно и нерационально еще по одной причине. Горные туннели обычно строят так. Из двух точек, расположенных на противоположных склонах гор, два проходческих щита, управляемые лазером, начинают прокладывать туннель строго по прямой линии. Сама же трасса каждой строящейся половинки туннеля несколько поднимается над уровнем горизонта. Проходческие щиты должны встретиться в центре туннеля несколько выше стартовых точек. В таком крышеобразном туннеле не только не будет скапливаться вода, но и при необходимости из него за счет своего веса сможет выкатиться заглохший транспорт. Свет в конце такого длинного туннеля можно увидеть, только дойдя до его середины.

Математические задачи этой книги делятся на две группы: те, на которые есть прямые указания в произведениях Толстого (задача о трех небесных телах (см. раздел 8), например), и те, связь которых с Толстым просматривается весьма туманно (задача о погоне, например, в разделе 11). Задача о гравитационном поезде с его тригонометрическими функциями (см. рис. 13.3–13.5) «туманно» истекает из такой цитаты «Детства» Толстого: «*Володя на днях поступает в университет, учители уже ходят к нему отдельно, и я с завистью и невольным уважением слушаю, как он, бойко постукивая мелом о черную доску, толкует о функциях, синусах, координатах и т.п., которые кажутся мне выражениями недосягаемой премудрости*». Эти «функции, синусы и координаты» довольно «ясно» просматриваются на рисунках, иллюстрирующих задачу о гравитационном поезде, движение которого можно обрисовать двумя функциями и двумя графиками на рис. 13.4. Но здесь можно обойтись и одним графиком – одной замкнутой кривой – см. рис. 13.8. Это так называемый фазовый портрет, где по оси абсцисс отложен пройденный путь гравитационного поезда, а по оси ординат – его скорость. Какую форму имеет эта кривая? Внимание! Эта замкнутая кривая имеет форму… толстовского «*круга эллиптической формы*»! Вспомним Красносельский «гипподром»! Дело в том, что судить о форме этой замкнутой кривой никак нельзя, так как на осях этого графика отложены разные физические величины – длина и скорость. Если менять масштабы осей, то мы можем получить и круг (вернее, окружность), и эллипс. Вот тут-то и вылезает знаменитый толстовский «круг эллиптической формы»! При одинаковых физических величинах менять масштабы осей нельзя – они должны быть всегда одинаковыми – см., например, рис. 8.17.

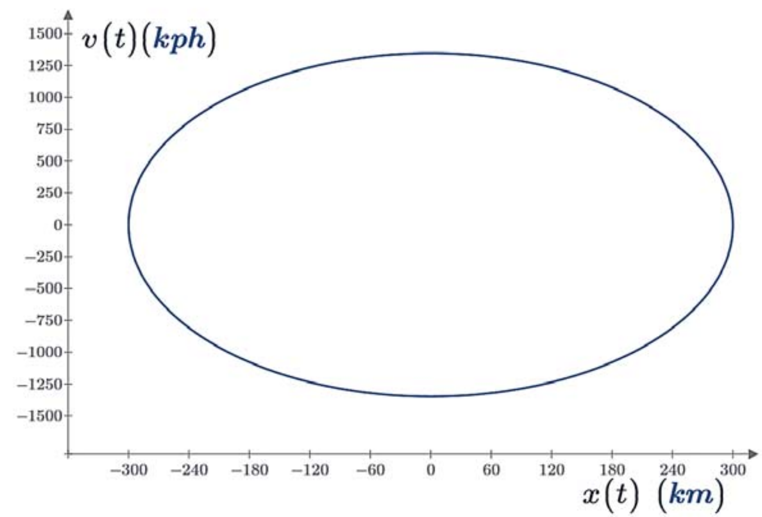


Рис. 13.8. Круг эллиптической формы

Движение гравитационного поезда с учетом сил трения, когда локомотив тянет всегда в одну сторону, будет иметь более интересный фазовый портрет – см. рис. 13.9. Это так называемый *аттрактор* – спираль, сворачивающаяся в точку. Можно узреть в этой спирали туннель для нашего гравитационного поезда. Такой туннель, такую затягивающую воронку видят люди перед своей кончиной. Об этом рассказывают те, кто пережил клиническую смерть. Видела ли Анна Каренина что-то подобное в момент самоубийства под колесами поезда?! *«Где я? Что я делаю? Зачем?» Она хотела подняться, откинуться; но что-то огромное, неумолимое толкнуло ее в голову и потащило за спину. «Господи, прости мне все!» – проговорила она, чувствуя невозможность борьбы. Мужичок, приговаривая что-то, работал над железом. И свеча, при которой она читала исполненную тревог, обманов, горя и зла книгу, вспыхнула более ярким, чем когда-нибудь, светом, осветила ей все то, что прежде было во мраке, затрещала, стала меркнуть и навсегда потухла.*

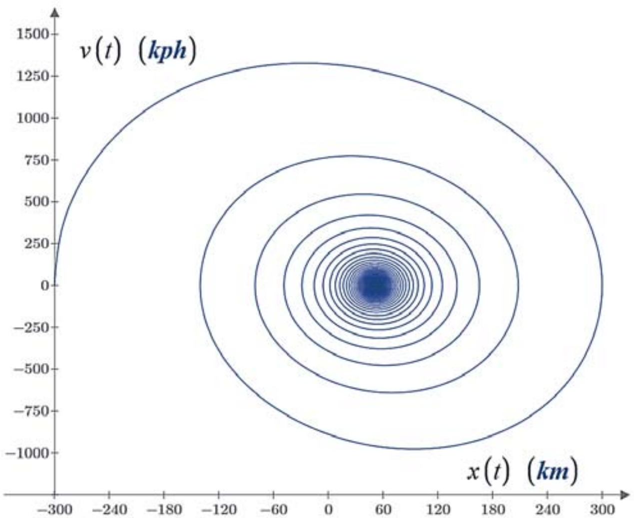


Рис. 13.9. Фазовый портрет движения гравитационного поезда с учетом сил трения

Можно попытаться построить реальный фазовый портрет перемещения Анны Карениной по маршруту Санкт-Петербург – Москва – Санкт-Петербург в поезде «туда с матерью», а «обратно с сыном». Там будут остановки, где скорость равна нулю, а расстояние будет константой… Туда Анна ехала одной женщиной, а вернулась совсем другой…

При особом желании можно получить и еще более экзотический круг… синусоидальной формы.

Попросите кого-нибудь нарисовать полную синусоиду, а не только ее часть, как на рис. 13.4. Ответ, скорее всего, будет таков: это сделать невозможно. Синусоида – это бесконечная волнистая кривая. А вот и не так! Дело в том, что подавляющее число людей, строя график, думают только о прямоугольной (декартовой) системе координат. А есть еще и полярная система, в которой синус прорисовывается полностью. Без компьютера строить полярные графики на классной доске или на листочке бумаги было довольно сложно. Но и у компьютеров не все хорошо с этим графиком, так как почти все программы, строящие полярные графики, по умолчанию работают только с неотрицательными значениями функций. Из-за этого синусоида искажается до окружности, до «круга синусоидальной формы» – см. левый график на рис. 13.10.

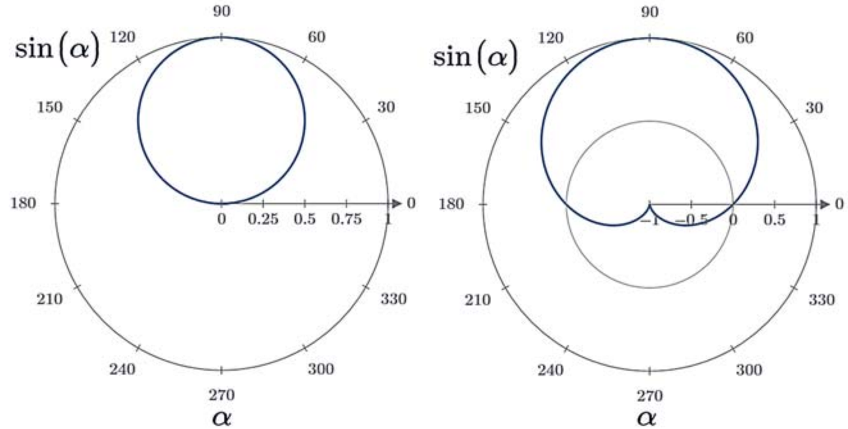


Рис. 13.10. Полный синус

Если же отступить от умолчания, то можно построить правильную полярную синусоиду (правый график на рис. 13.10) в виде перевернутого слегка пополневшего сердца.

Такая кривая известна в математике под именем кардиоида. Ее выписывает фиксированная точка окружности, катящейся по другой неподвижной окружности с таким же радиусом (https://ru.wikipedia.org/wiki/Кардиоида). Если окружность катится не по другой окружности, а по прямой линии, то получается не кардиоида, а ранее нами упомянутая циклоида (см. рис. 11.10 – https://ru.wikipedia.org/wiki/Циклоида).

14. НЕМНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Производную функции полуэллипса $y(x,\ a,\ b)$, запрятанную под квадратным корнем (см. рис. 4.6 и 5.1), можно без особого труда вычислить вручную или с помощью интернет-ресурсов. А вот сам интеграл, под которым «сидят» этот корень и эта производная, «взять» невозможно (рис. 14.1). Нельзя выразить этот интеграл комбинацией элементарных функций и арифметических действий. Подынтегральное выражение лишается производной, но сам интеграл остается!

$$y(x,a,b) := \frac{\sqrt{-\left(a^2 \cdot b^2 \cdot (x-a)\cdot(x+a)\right)}}{a^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x,a,b) \rightarrow \frac{-\left(b^2 \cdot x\right)}{\sqrt{-\left(a^2 \cdot b^2 \cdot x^2\right) + a^4 \cdot b^2}}$$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\left(x, a, \frac{\sqrt{5 \cdot a^2} - a}{2}\right)\right)^2}\, \mathrm{d}x \rightarrow \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot x^2}{(-x+a)\cdot(x+a)\cdot\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2} - 3\cdot a\right)} + \frac{2\cdot x^2 + a^2}{(a-x)\cdot(x+a)}}\, \mathrm{d}x$$

Рис. 14.1. Взятие производной и интеграла функциональной зависимости

Поэтому-то и нет простой формулы для вычисления длины эллипса. Примерно такой, по которой рассчитывается его площадь, – πab (если $a = b$, то эллипс превращается в круг с площадью πr^2)[21]. Существуют разнообразные приближенные именные и безымянные формулы для вычисления длины эллипса. Точные же формулы содержат сходящиеся бесконечные степенные ряды, работа с которыми – это сама по себе довольно сложная математическая операция. Попытки решения задачи о длине периметра эллипса породили целый класс так называемых эллиптических интегралов, над исследованием которых работали многие крупные и даже великие математики[22]. Решение многих дифференциальных уравнений математической физики сводится к вычислению этих самых эллиптических интегралов.

[21] В русском и английском языках есть слова, обозначающие отдельно кривую (окружность – a circle) и фигуру (круг – a disk). Но у эллипса нет такого разделения – это и замкнутая кривая с длиной, и фигура с площадью.

[22] В Википедии можно прочесть, что к династии Бернулли *принадлежат девять крупных математиков и физиков (из них три великих)*. По какому критерию математики и другие люди науки и искусства делятся на крупных и великих? Читаем у Чехова: *«Если всех живых русских литераторов, соответственно их талантам и заслугам, произвести в чины, то: Действительные тайные советники (вакансия). Тайные советники: Лев Толстой, Гончаров. Действительные статские советники: Салтыков-Щедрин, Григорович. Статские советники: Островский, Лесков, Полонский…»* Вакансию, как утверждают злые языки, Чехов приберег для себя. Но это не похоже на Антона Павловича. Хотя он писал эту табель о рангах тогда, когда только начал «выдавливать из себя раба».
Сейчас у нас в России многие аэропорты получили имена великих и не очень великих людей, в частности поэтов и писателей (см. https://regnum.ru/news/polit/2639504.html). Очень жаль, что Льва Николаевича обошли. Будем надеяться, что когда-нибудь появится международный аэропорт в Туле и ему присвоят имя Толстого.
Автор ходил в школу, где на фасаде были барельефы Пушкина, Толстого, Горького и Маяковского. По паре поэтов и писателей, по паре русских и советских. Шутники говорили, что эта четверка знаменитостей имеет все виды волосяного покрова лица: Толстой с бородой, усами и бакенбардами, Пушкин только с бакенбардами, Горький только с усами, а Маяковский полностью бритый (см. также конец книги). Ходили слухи, что эти архитектурные излишества в виде барельефов литераторов были задуманы только для школ с гуманитарным уклоном. Школы же с уклоном на точные науки тоже хотели украсить барельефами, но не литераторов, а ученых из точных областей знаний (математика, физика и проч.). Но так и не решили, кого удостоить этой чести.
Проблему «великий–знаменитый–выдающийся–крупный–заметный и т.д.» (см. выше) может решить раздел математики под названием «теория нечетких множеств» с его ключевым понятием функции принадлежности. Можно сказать, что Лев Толстой относится к множеству великих писателей с функцией принадлежности, равной 0,999, а автор этих строк – с функцией принадлежности, равной 0,001. И никаких проблем.
Сталин, говорят, собирался официально ранжировать советских писателей («инженер человеческих душ», «старший инженер человеческих душ» и т.д. вплоть до «главный инженер человеческих душ» – первый секретарь Союза писателей СССР) и даже хотел нарядить их в мундиры со знаками отличия. Примерно в такие, какие сейчас носят на официальных приемах прокуроры, дипломаты и прочий подневольный чиновный люд. Некоторым аристократам старой России давали придворный чин камер-юнкера и камергера (Стива Облонский красовался в камергерском мундире на уездных выборах). Так, например, Пушкина похоронили во фраке по желанию его вдовы. Но вот на гроб положили камер-юнкерскую фуражку. В СССР и в новой России некоторых ученых (новая советская аристократия) избирают в члены-корреспонденты и академики РАН – в камер-юнкеры и камергеры.

Опытные математики нередко говорят примерно так: «Я нутром чую, что в этом дифференциальном уравнении “сидит” эллиптический интеграл и что аналитически уравнение не решить – придется прибегать к численным методам».

У некоторых вузовских «вредных» преподавателей высшей математики есть такой «вредный» методический прием – подсунуть студенту «неберущийся» интеграл и посмотреть, что он будет с ним делать. Отсюда, можно предположить, и исходит некая студенческая, толстовско-левинская нелюбовь к интегральному исчислению и к дифференциальным уравнениям – к дифурам [12]. Компьютеру же все равно, какой интеграл ему «подсунули», – он его спокойно «берет». Вернее, так. Сначала компьютер по наводке человека или самостоятельно пытается его взять аналитически, и если это не получается, то берет его численно [10, 22]. Остается только проверить, нет ли ошибки в ответе. Для этого можно, к примеру, проанализировать производную ответа и сравнить ее с исходным подынтегральным выражением. В настоящее время главный акцент в учебном процессе сделан не на решение уравнений, а на их составление, выбор оптимального компьютерного инструмента гибридного решения и на проверку правильности. Но до этого счастливого времени, увы, не дожили Толстой с Левиным и княжной Марьей.

Это качественное отличие интеграла от производной для многих студентов и уже не студентов является некой мистической загадкой, тайным кодом математического мироздания. А Толстой питал слабость к таким тайнам!

Основная теорема математического анализа про интеграл и производную, имеет интересную историю, косвенно касающуюся русской литературы и связанную с обвинениями в плагиате. Как мы уже писали, Лейбниц и Ньютон упрекали друг друга в том, что один «позаимствовал» у другого идею основной теоремы математического анализа. Гончаров, которого Чехов непонятно почему поставил на одну доску с Толстым (см. сноску 22), разругался с Тургеневым из-за идеи романа «Обрыв», оказавшейся в повести «Дворянское гнездо». Вспоминается поговорка «Слово – серебро, а молчание – золото!» (см. разделы 5 и 6). Гончарову не нужно было делиться с Тургеневым идеями романа. Но не исключено, что эта идея витала в воздухе. Говорят, что великие идеи и в науке, и в искусстве (см. введение) сваливаются на нас откуда-то сверху. Кто первый подставит свою голову или свое сердце? А могут ли это сделать одновременно несколько человек?

Одну из красивейших физико-математических задач – задачу о провисании цепи [13] решили одновременно и независимо друг от друга немец Лейбниц, голландец Гюйгенс и швейцарец Бернулли. А до них даже великий Галилей считал, что цепь провисает по параболе. Правда, в конце жизни Галилей признался, что был неправ, но не успел вывести формулу цепной линии. Вспомним, что великий Толстой считал, что комета 1812 года летит по параболе.

15. ИДЕЙНОСТЬ И КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Одно из ранних названий романа Толстого «Анна Каренина» – «Два брака». Имелись в виду брак Константина Левина с Кити Щербацкой и незаключенный, гражданский брак Анны Карениной с Алексеем Вронским. Основная идея романа[23], как полагают многие «идейные» критики, в том, что брак, основанный только на чувственности, на страсти, не может быть по-настоящему счастливым – он может кончиться даже трагически (история Карениной и Вронского). Брак же, в котором одновременно присутствует в оптимальных пропорциях и чувственность, и духовность, – это совсем другое дело (Кити и Левин).

Дилемму духовности и чувственности можно попытаться спроецировать и на… численные и аналитические (символьные) методы решения математических задач вручную или на компьютере. Только сочетание духовности (аналитика, символ) и чувственности (число) приводит к успешному гибридному решению задач и в математике, и в жизни. Хотя можно поспорить, где больше духовности, а где больше чувственности – в символьной или в численной математике.

На рис. 14.1 показана работа символьной математики пакета Mathcad: взятие производной от «половинки» функции эллипса (обе половинки показаны на рис. 4.1). Но эту работу (формирование функции и взятие ее производной) можно сделать более аккуратно с получением более простого и, следовательно, более красивого ответа. На рис. 15.1 формирование функции половинки эллипса из канонического уравнения этой замкнутой кривой ведется в ручном режиме (hand made – первая строка). Переносить некоторые слагаемые в левую часть уравнения, умножать обе части уравнения на множитель и т.д. нас учили в школе, и так мы делали в тетрадях, а кто-то даже и в уме. Эти «кто-то» могли в уме или на листочке бумаги взять производную полученной функции, которая оказалась короче и симпатичнее своего «механизированного» двойника, показанного на рис. 14.1. Но взятие производной более-менее сложной функции основная масса «технарей» в настоящее время поручает компьютеру (см. вторую строку на рис. 15.1). Производная в результате такой гибридной работы тоже оказалась проще и изящнее, но после небольшой ручной доработки – умножения числителя и знаменателя дроби на минус единицу и «запихивания» ее под квадратный корень.

[23] Основную «идею» романа точно и кратко описал Некрасов в своей знаменитой эпиграмме: *«Толстой, ты доказал с терпеньем и талантом, / Что женщине не следует “гулять” / Ни с камер-юнкером, ни с флигель-адъютантом, / Когда она жена и мать».*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \qquad y^2=b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad y(x,a,b):=b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\frac{d}{dx}y(x,a,b)\rightarrow\frac{-(b\cdot x)}{a^2\cdot\sqrt{-\frac{x^2}{a^2}+1}} \qquad y'(x,a,b):=\frac{-b\cdot x}{a^2\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

Рис. 15.1. Пример гибридной математики

Однако в решениях, показанных на рис. 4.6 и 5.1, мы не работали с выражениями для производной при вычислении длины половинки эллипса через определенный интеграл, а численно «брали» эту производную. Почему?!

Во-первых, мы опирались на знаменитый KISS-принцип программирования. Эта аббревиатура расшифровывается так: Keep it simple, stupid – Делай это проще, дурачок! Этот совет предписывает убирать из расчета все, что можно убрать, – аналитическое взятие производной, ограничившись численной операцией. Пушкин, реформируя русский язык и русскую литературу, выкидывал все лишнее, все, что можно выкинуть…

Во времена Толстого, да и совсем недавно открытое сожительство людей без официального (церковного и/или гражданского) брака (связь Анны Карениной с Вронским, например) очень многими считалась невозможным, аморальным. Теперь же это стало нормой. И связано это, как считают одни, с развитием общества. Или с его деградацией, как утверждают другие.

Также во времена Толстого численное взятие производной считалась невозможным и даже в каком-то смысле аморальным. Теперь же это стало нормой. И связано это в первую очередь с появлением быстродействующих компьютеров и «умных» программ. Более того, в среде Mathcad есть режим счета под названием SmartMath («умная математика»), когда компьютер, столкнувшись с интегралом или производной, не будет «общаться» с ними традиционно, то есть численно, а постарается символьно найти первообразную или производную и работать уже с ними. Это существенно ускоряет расчеты и делает их более точными. Численную (прикладную) математику некоторые считают не развитием, а деградацией математики. Недаром есть такая присказка: «Прикладная математика отличается от математики, как милостивый государь от государя!» А принцип «Делай это проще, дурачок!» имеет противовес в виде уже упомянутой нами поговорки о том, что иная простота хуже воровства.

Что-то подобное мы можем наблюдать и в жизни.

Многие исследователи не считают дифференциальное уравнение решенным, если не найдено его аналитическое решение в виде набора формул, а получено только численное решение в виде таблиц и графиков. Большинство людей не считают свою жизнь устроенной, если они не оформили свои брачные отношения, а довольствуются только сожительством.

Люди живут вместе, не оформляя свои отношения (численная, чувственная математика). Но оба или кто-то один из них часто ощущают дискомфорт таких отношений. Во многих странах такие пары получили юридическую возможность заключить некий полубрак (символьная, духовная математика) благодаря умному (Smart) законодательству. С другой стороны, с развитием численных методов постепенно пропадают понятия «неберущийся интеграл», «нерешаемое аналитически дифференциальное уравнение» и т.д.

Конкретный пример. Считается, что четвертая степень для алгебраических уравнений является наивысшей, при которой существует аналитическое решение в радикалах в общем виде (то есть при любых значениях коэффициентов). Но в настоящее время компьютер решает аналитически уравнения с любыми степенями, выдавая ответ в виде... выражения с функцией Root (корень), по которой можно делать численные расчеты точно так же, как и с синусом и другими известными элементарными функциями. Четкая граница между элементарными и специальными функциями постепенно размывается. Размывается также граница между браком и сожительством.

В школе, кстати сказать, «гуманитариев» терроризировали не только наименьшим общим кратным (см. рис. 2.1), но и квадратными уравнениями, уравнениями второй степени с двумя корнями. Что уж тут говорить о кубическом уравнении, об уравнении четвертой степени...

16. ЛИТЕРАТУРНО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

Если сажень (см. рис. 4.4) поделить на три, то получится аршин. Если аршин поделить на шестнадцать, то выйдет вершок.

Рост людей и лошадей в старой России измеряли вершками. Вот некоторые примеры из литературы.

«В бараке стояло пять лошадей по денникам, и Вронский знал, что тут же нынче должен быть приведен и стоит его главный соперник, рыжий пятивершковый[24] *Гладиатор Махотина»*, – читаем мы в «Анне Карениной». Герасим из повести Тургенева «Муму» был двенадцати вершков росту. В компании, которая в «Идиоте» Достоевского ввалилась с «обналичкой» (сто тысяч рублей[25]) на вечер по случаю дня рождения Настасьи Филипповны, был *«огромный вершков двенадцати*[26] *господин, тоже необычайно толстый, чрезвычайно мрачный и молчаливый и, очевидно, сильно надеявшийся на свои кулаки»*.

В приведенных оценках роста умалчивали про два аршина[27], которые имели каждый нормальный взрослый человек и каждая нормальная взрослая лошадь. На рис. 16.1 можно увидеть, как рост

[24] Рост лошади измеряли по холке – по высшей точке этого благородного животного в момент, когда оно щиплет траву или пьет воду. При этом, повторяем, обычно два аршина упускали (умолчание, эллипсис). Хотя в пронзительной повести Толстого «Холстомер. История лошади» сказано без умолчания, что *«мерин был роста большого – не менее двух аршин трех вершков»*. Высокий, но все же на два вершка (примерно 9 сантиметров) ниже Гладиатора!

[25] *«Это была большая пачка бумаги, вершка три в высоту и вершка четыре в длину»*. Достоевский забыл написать о третьем измерении – о ширине этого прямоугольного параллелепипеда. См. интересное исследование о Достоевском и математике [29]. Знакомство с ним и с вот этой [30] статьей – еще один побудительный мотив к написанию данной книги. Достоевский хоть и был не гуманитарий, а инженер по образованию, но, по утверждению авторов статьи [29], сугубо отрицательно относился к точным наукам, в частности к математике. Чего не скажешь о «гуманитарии» Толстом, и что отмечено в этой книге.

[26] Нюанс русского языка. «Двенадцать вершков» – это результат точного измерения роста, а «вершков двенадцать» – это результат некой субъективной оценки на глазок (см. конец раздела).

[27] Три аршина – это, напоминаем, одна сажень. Читаем у еще одного классика русской литературы – у Гоголя: *«А Пробка Степан – плотник! Я голову прозакладаю, если вы где сыщете такого мужика. Служи он в гвардии, ему бы бог знает что дали. Трех аршин с вершком росту!»* Собакевич, конечно, по своему обыкновению слегка приврал о росте Степана Пробки, но… Или еще: *«А фельдъегерь уж там, понимаете, и стоит: трехаршинный мужичина какой-нибудь, ручища у него, можете вообразить, самой натурой устроена для ямщиков, – словом, дантист эдакой…»*

тургеневского Герасима (толстяка из «Идиота» Достоевского), лошади по клички Гладиатор, а также одного гоголевского персонажа (см. сноску 27) пересчитали на современные единицы.

$$сажень := 7\ ft = 2.134\ m \qquad аршин := \frac{сажень}{3} = 71.12\ cm \qquad вершок := \frac{аршин}{16} = 44.45\ mm$$

$$Герасим := 2\ аршин + 12 \cdot вершок = 196\ cm \qquad Гладиатор := 2\ аршин + 5 \cdot вершок = 164\ cm$$

$$Пробка\_Степан := 3\ аршин + вершок = 218\ cm$$

Рис. 16.1. Рост людей и лошадей

Вершок – это очень удобная единица измерения роста человека, позволяющая перейти от *числовых* к *лексическим константам*, что является ключевым понятием *теории нечетких множеств* – относительного молодого раздела математики. Вершок намного удобнее европейского сантиметра или английского дюйма[28]. И вот почему! Если построить гистограмму роста взрослых мужчин [11, 13, 28], отложив по оси абсцисс рост именно в вершках, а по оси ординат – процент людей с таким ростом, то мы получим типичный статистический колокол, составленный из пяти столбиков (из пяти пальцев руки): 6 вершков (примерно 169 сантиметров и меньше, рис. 16.2) – низкий рост, 7 вершков (173 сантиметра) – рост ниже среднего, 8 вершков (178 сантиметров) – средний рост, 9 вершков (182 сантиметра) – рост выше среднего и 10 вершков (187 сантиметров и больше) – высокий человек. По бокам же этого колокола могут находиться столбики с данными по особам типа: слева Мальчик-с-пальчик из сказки Шарля Перро, а справа тургеневский Герасим и гоголевский «дантист». Но их немного. Подавляющее большинство взрослых мужчин «укрылись» статистическим колоколом – кривой нормального распределения, если говорить языком математики.

[28] Эркюль Пуаро Агаты Кристи имел рост пять футов и пять дюймов. Такой же высоты (точнее, «низины») был самый первый Форсайт, перебравшийся из провинции в Лондон, в уже упомянутой нами эпопее Джона Голсуорси. Ирония судьбы: Голсуорси получил Нобелевскую премию по литературе, а Толстой – нет, хотя он несколько раз был номинирован на эту самую престижную и самую спорную премию (см. также сноску 1 на стр. 14). Еще одна спорная премия – это Нобелевская премия мира. Обе очень сомнительные. Лучше бы вместо них была утверждена одна Нобелевская премия по математике. Автор, кстати, не был бы против получить Шнобелевскую премию за эту книгу-исследование.

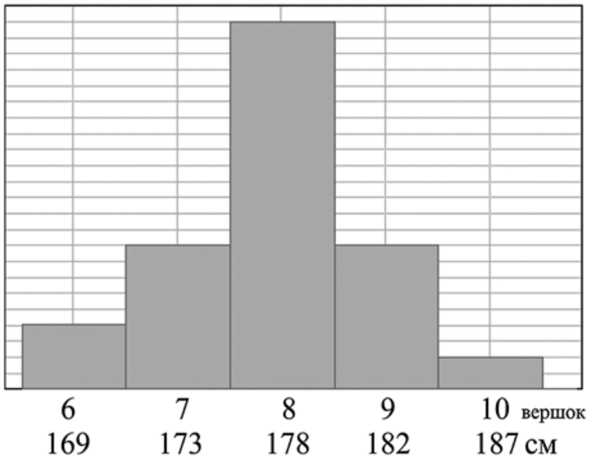


Рис. 16.2. Гистограмма роста взрослого мужчины

«Вронский был невысокий, плотно сложенный брюнет…» – читаем мы у Толстого. По этой цитате можно прикинуть его рост – примерно 7 вершков (плюс два аршина, конечно), а потом все это перевести в сантиметры. Получится примерно 173 сантиметра. *«Фру-Фру была среднего роста лошадь и по статям не безукоризненная»*, – эта цитата из романа позволяет оценить и рост лошади Вронского. (В кличке лошади слышен хруст ее ломаемого хребта. В этом смысле символичен также дефис, «ломающий» кличку лошади.) Высокая лошадь – это пять вершков (см. выше), а средняя, можно предположить, – это три-четыре вершка, или с учетом двух аршин 155–160 сантиметров. В холке, конечно.

С ростом Вронского (173 сантиметра) разобрались, а что с его весом? Читаем Толстого дальше.

«Ему не нужно было очень строго выдерживать себя, так как вес его как раз равнялся положенным четырем пудам с половиною; но надо было и не потолстеть, и потому он избегал мучного и сладкого». Здесь можно предположить, что на красносельские и другие подобные скачки допускались всадники, вес которых не должен быть меньше четырех пудов с половиною. Иначе бы на лошадей сажали детей и карликов. А какой вес Вронского в килограммах? В советском фильме «Смелые

люди» (1950) пожилой тренер конного завода (его играет великий актер Алексей Грибов) сообщает, что *«настоящий жокейский вес три пуда пятнадцать фунтов, или 54 кило»*. Так получится, если принять, что в пуде 16 килограммов, или 40 фунтов (традиционная современная оценка пуда и фунта, равного 400 граммам).

Интернет подсказывает, что в России с 1899 года один пуд приравняли к 16,3804964 килограмма. Но роман «Анна Каренина» был написан раньше – в 1873–1877 годах. Более-менее точно известно, что в пуде было 40 фунтов, хотя интернет дает и другие оценки. Английский фунт тогда и сейчас – это 453,59237 грамма. Немецкий современный фунт равен 500 граммам. Для нас же сейчас фунт – это, повторяем, ровно 400 граммов. Если пуд 1899 года поделить на 40, то мы получим 409,51241 грамма. Обобщая все это, можно предположить, что Вронский при росте примерно 173 сантиметра весил около 73 килограммов. Это в точности соответствует известной эмпирической формуле, гласящей, что сантиметровый рост взрослого мужчины – это его вес в килограммах плюс сто: 73 + 100 = 173. Вронский был довольно заурядным человеком не только по своим душевным, человеческим качествам, но и по своим физическим параметрам. Вспомним гоголевского Чичикова: *«В бричке сидел господин, не красавец, но и не дурной наружности, ни слишком толст, ни слишком тонок; нельзя сказать, чтобы стар, однако ж и не так чтобы слишком молод»*. Зачем же Анна полюбила Вронского?! А *«затем, что ветру и орлу и сердцу девы нет закона»*!

> В настоящее время (не знаем, как во времена Толстого) всадников перед скачками взвешивают в полной амуниции с седлом в руках. А вот хорошая цитата из Зощенко, которую грех здесь не привести: *«А весом, прямо скажу, больше девяти пудов. Он так и на карточках на визитных печатал: помещик и потомственный дворянин Исидор Сидорович Лысаков, вес – 9 п. 20 ф.»* Этот дворянин на визитной карточке ничем не мог похвастаться, кроме своего огромного веса (полтора центнера). Тема деградации русского дворянства – физической и моральной – часто обсуждается в произведениях Толстого и других отечественных классиков литературы.

Когда-то давно автор перед лекцией на тему «Регрессионный анализ» подбирал пример статистической выборки для такого анализа. Но когда он «взошел на кафедру» и взглянул на аудиторию, то понял, что эта выборка находится прямо перед его глазами. Была проведена анонимная перекличка студентов: юноши в записочках сообщили лектору свой вес и рост (студентки по понятным причинам были освобождены от этой процедуры; но у автора есть выборка по студенткам «90-60-90» плюс вес и рост, хотя он эти данные еще не обработал). Результаты опроса показаны на рис. 16.3.

Три прямые пронизывают точки на рис. 16.3. Две пологие прямые (коричневая и красная) в гуще точек – это результат обработки статистических данных (тот самый регрессионный анализ) методом наименьших квадратов и медиан-медианным методом. Третья, зеленая, более крутая прямая отражает ранее упомянутое эмпирическое правило о том, что сантиметровый рост нормального человека – это его вес в килограммах плюс сто. На рис. 6.2–6.4 были показаны некие эстетические характеристики студентов автора, их, так сказать, интерьер. Рисунок 16.3 – это уже некий экстерьер студентов.

Кстати, информацию на рис. 6.2–6.4 (студенческие золотые прямоугольники) и на рис. 16.3 (рост и вес студентов) можно попытаться скомбинировать. Есть заблуждение в том, что пояс человека (талия, пупок) делит его на две неравные части в соответствии с золотым соотношением. Но интернет сообщает, что «измерения нескольких тысяч человеческих тел, проведенные Адольфом Цейзингом (1810–1876), немецким поэтом, интересовавшимся математикой, в частности золотым сечением, позволили обнаружить, что для взрослых мужчин это отношение равно в среднем примерно 13/8 = 1,625, а для взрослых женщин оно составляет 8/5 = 1,6. Так что пропорции мужчин ближе к золотому сечению 1,618, чем пропорции женщин. Однако женщина в обуви на каблуках не только прибавляет в росте, но и может оказаться ближе к золотой пропорции». Сразу вспоминается госпожа Шталь, с которой Кити Облонская познакомилась на водах за границей. Госпожа Шталь десять лет не вставала,

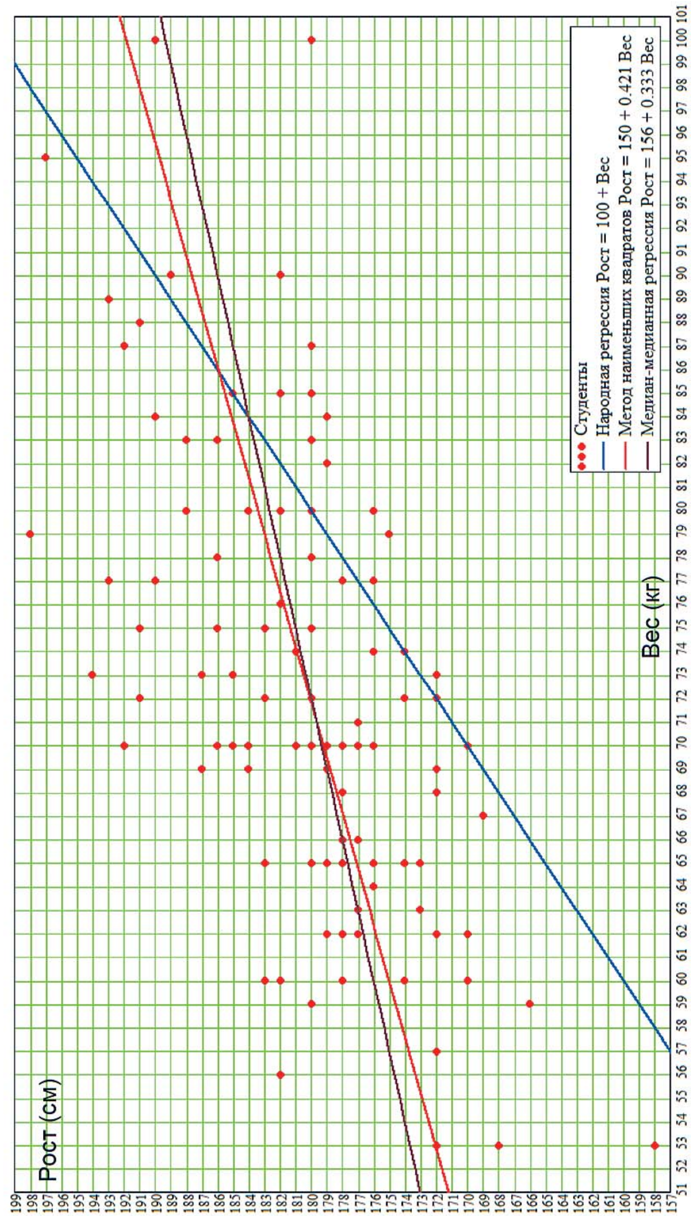


Рис. 16.3. Рост и вес студентов автора

притворяясь немощной, а на самом деле была коротконожкой, и этот дефект фигуры даже высокими каблуками нельзя было подправить. Женщины тех времен «подправляли» пропорции своего тела 90-60-90, утягивая талию корсетом и увеличивая зад турнюром (*«…на ней был турнюр с четырьмя перехватами…»* – читаем мы у Чехова в рассказе «Драма»). Нельзя представить себе на иллюстрациях и в экранизациях Анну Каренину в полный рост, в профиль и без турнюра: с особым изгибом тела от груди (верхний предел) к бедрам (нижний предел) в виде эдакого интеграла– см. рис. П3. Достоевского достали эти турнюры – см. третью главу «Зимних заметок о летних впечатлениях».

Кстати, кличка лошади Вронского «Фру-Фру» – это непереводимое выражение (франц. frou-frou), основанное на звукоподражании шуршанию турнюров элегантных дам. Фру-фру – это также и полоски особого шелка, вкладываемые в турнюры для такого шуршания. Руские мещане, к слову сказать, в те времена для этих же целей «ложили» в подметки сапог бересту: *«Костюмчик серенький, колесики со скрипом…»*

А в начале XIX века (во времена Наташи Ростовой) талия у женских платьев «задралась» аж под грудь. Это был стиль ампир.

Широкие бедра у женщины свидетельствовали о том, что она сможет без проблем родить ребенка. Женщина с пышной грудью успешно выкормит младенца (Кити Левина, урожденная Щербацкая, вслед за Наташей Безуховой, урожденной Ростовой, сама кормила своих детей грудью). А тонкая талия у «слабого пола» говорила о том, что женщина еще не беременна и за ней можно ухаживать как за невестой. Впрочем, шалопаю Васеньке Весловскому ничто не мешало ухаживать за замужней Кити, которая была уже «на сносях». Пропорции «бюст-талия-бедра» дополняли пышные волосы, свидетельствующие об отменном здоровье женщины. Но и тут шли на обман, используя в прическе накладные волосы. *«Эти глупые шиньоны! До настоящей дочери и не доберешься, а ласкаешь волосы дохлых баб»*, – ворчал старый князь Щербацкий, общаясь с любимой дочкой Катей. В наше время этот обман перешел на макияж лица.

С возрастом люди обычно прибавляют в весе. Рост же человека остается постоянным, выйдя на стабильный годам к 18–20 (студенты автора на рис. 16.3). Следовательно, точки рис. 16.3 в течение времени (со взрослением человека) будут дрейфовать вправо, приближаясь к прямой вида $y = x + 100$. Кстати, дрейфовало со временем и представление об эталоне мужской красоты. Во времена написания романов Толстого считалось, что идеальный юноша должен быть стройным, а идеальный взрослый мужчина – полным. Слово «здоровый» имеет два смысла – «не больной», и «большой», «тучный», «полный», «в теле» («Хорошего человека должно быть много!»). Полным был Пьер Безухов. Стива Облонский, некий идеал мужской красоты, *«повернул свое полное, выхоленное тело на пружинах дивана, как бы желая опять заснуть надолго»*. Гоголевская Агафья Тихоновна, перебирая женихов, воскликнула: *«Нет, мне эти субтильные как-то не того… не знаю… Я ничего не вижу в них…»* Это отчасти касалось эталонов и женской красоты: *«Она* <Анна Каренина> *вышла быстрою походкой, так странно легко носившею ее довольно полное тело»*. Эталон женской красоты, но не девичей! Трудно представить себе полную тургеневскую девушку. В старые времена полнота тела была косвенным признаком достатка и благополучия человека, «его носившего». В наши дни все кардинально изменилось. Зрелый или даже пожилой человек со спортивной, подтянутой фигурой априори считается не только здоровым, но и богатым. У него есть средства и время следить за собой. Это касается мужчин, но в особенности женщин. Теперь если на вокзале или в аэропорту встретятся чеховские Толстый и Тонкий, то не ясно, кто из них успешная личность, а кто лузер. Хотя и в рассказе Чехова не все однозначно в плане понимания, что такое удавшаяся жизнь и кто более счастлив – Толстый или Тонкий. Сам Лев Толстой, по разным оценкам, имел вес 80 кг при росте 181 см.

Ремарка про метр. Сейчас мало кто знает, откуда пошел метр. Эту единицу длины привязывали то к длине парижского меридиана (одна десятимиллионная часть расстояния от Северного полюса до экватора по поверхности земного эллипсоида на долготе Парижа), то к длине волны света определенной части спектра… В школе нас так учили! Сейчас пытаются узаконить метр, привязав его к какой-то физической константе. Это уже случилось с килограммом. Килограмм – это такая единица массы, при которой постоянная Планка равна такой-то величине. Метр тоже пытаются оторвать от его физической родословной. Вспомнить, от чего пошел метр, нам поможет такой отрывок из «Анны Карениной»: *«Была пятница, и в столовой часовщик-немец заводил часы. Степан Аркадьич вспомнил свою шутку об этом аккуратном плешивом часовщике, что немец “сам был заведен на всю жизнь, чтобы заводить часы”, – и улыбнулся. Степан Аркадьич любил хорошую шутку»*.

В столовой дома, где «все смешалось», были, скорее всего, напольные часы с метровым маятником, который каждым своим взмахом отмеривал ровно одну секунду. Если это было не так (а часовщик-немец не только заводил, но и подводил часы, регулировал их), то подкручивали специальный винтик на штырьке, торчащем внизу маятника. Тем самым меняли его длину, влияющую на период колебания. Движение маятника через шестеренки передавались минутной и часовой стрелкам часов. Чтобы такой маятник не затухал, часы нужно было заводить: закручивать пружину или поднимать гирю на цепочке. Таких гирь было две – одна для часов, а другая для механизма боя. Как не вспомнить тут гоголевское: *«Слова хозяйки были прерваны странным шипением, так что гость было испугался; шум походил на то, как бы вся комната наполнилась змеями; но, взглянувши вверх, он успокоился, ибо смекнул, что стенным часам пришла охота бить. За шипеньем тотчас же последовало хрипенье, и наконец, понатужась всеми силами, они пробили два часа таким звуком, как бы кто колотил палкой по разбитому горшку, после чего маятник пошел опять покойно щелкать направо и налево»*.

На рис. 16.4 показан расчет периода колебания маятника (почти две секунды) длиной (*L*) один метр по формуле, которая со школьных лет навеки осталась в нашей памяти: «два пи корень из эль, деленной на же».

$$L := 1\ m \qquad g = 9.807\ \frac{m}{s^2} \qquad \pi = 3.142 \qquad 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2.006\ s$$

Рис. 16.4. Период колебания маятника напольных часов

Люди давно хотели отвязать единицы длины от рук, ног и других частей человеческого тела и привязать их к какой-то более-менее постоянной физической величине. Именно для этого во времена Просвещения и был выбран маятник напольных (столовых) часов. Так произошло знаменательное единение времени и пространства. Недесятичность изгнали из единиц массы и длины. Во времена Великой Французской революции пытались убрать недесятичность и из времени, но ничего из этого не вышло (в сутках 10 часов, в часе 100 минут и т.д.).

На рис. 16.5 показан расчет длины маятника с периодом колебания не две (см. рис. 16.4), а одна секунда. Это маятник (длиной почти в четверть метра) не напольных, а стенных часов, какие висели в доме Коробочки.

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = t \xrightarrow{solve, L} \frac{g \cdot t^2}{4 \cdot \pi^2}$$

$$t := 1\ s \qquad L := \frac{g \cdot t^2}{4 \cdot \pi^2} = 24.841\ cm$$

Рис. 16.5. Длина маятника настенных часов

Если часы с маятником перевернуть вверх ногами, пардон, вверх маятником, то мы получим… метроном – прибор, отбивающий такты музыки. Метр, метроном, метрология – все это слова с одним греческим корнем «мера, измеритель»… В корабельных, каретных, карманных и наручных часах маятник был заменен балансиром. Каретные часы впервые появились еще в середине XV века, но моду на них ввел Наполеон своими походами, в том числе и на Москву.

Сейчас почти все приборы, отмеряющие время, стали электронными. Механические ручные часы в настоящее время превратились в некий фетиш, в символ статуса владельца. Такая же судьба ожидает и бумажные книги. Но как приятно взять с полки томик Толстого, Гоголя, Чехова, Тургенева… (табель о писательских рангах Набокова – см. сноску 22 на стр. 153 с чеховской табелью о рангах писателей).

В [3] есть глава «Три нелинейности маятника», в которой показано, что формула на рис. 16.4 и 16.5 неправильная (первая нелинейность маятника). Упомянутый труд – это книга-билингва. Начало романа «Война и мир» – это тоже билингва. Вернее, так! Роман писался для тех, кто знал и русский, и французский язык. Но потом, по мере расширения круга читателей пришлось в сносках давать переводы французских текстов. Приятно иметь что-то общее с великим романом.

И последнее.

В математике перестановка местами сомножителей не меняет произведение. Этот переместительный закон в литературно-математической метрологии не совсем верен. Сравните два выражения: «двадцать метров» и «метров двадцать» (см. также сноску 26 на стр. 160). Первый случай может означать, что мы что-то точно измерили рулеткой или лазерным дальномером и сообщили результат. Если же мы что-то прикинули на глаз, то сначала озвучиваем, как сейчас говорят, единицу измерения, а потом – числовое значение. *«Отъехав три версты, Весловский вдруг хватился сигар и бумажника…»* Это предложение из «Анны Карениной» дотошный читатель может понять так, что на повозке был спидометр, по которому точно измерялся пройденный путь, или на дороге стояли верстовые столбы, у одного из которых Весловский вспомнил о забытых вещах. А вот в этом предложении: *«После реки Вронский овладел вполне лошадью и стал удерживать ее, намереваясь перейти большой барьер позади Махотина, и уже на следующей, беспрепятственной дистанции саженей в двести попытаться обойти его»*, – все точно с позиций математико-литературной метрологии – не ровно *двести саженей*, а весьма примерно *саженей двести*, что-то около четырехсот метров.

Проблему перестановки местами слов можно заметить и в уже неоднократно упоминавшемся нами предложении из «Анны Карениной»: *«Скачки должны были происходить на большом четырехверстном эллиптической формы кругу»*. Из него делается вполне закономерный вывод о том, что ипподром имел какую-то овальную, а не круглую, как в цирке, форму. И о том, что Толстому нравилось слово «эллипс». Но если б Лев Николаевич написал так: «Скачки должны были происходить на большом четырехверстном кругу в форме эллипса» или «Скачки должны были происходить на четырехверстной беговой дорожке в виде эллипса», – то тут скрывалось бы более-менее точное математическое определение эллипса, которое мы разобрали выше.

17. ТОЛСТОЙ И ИНТЕРНЕТ

Современные информационные технологии – это использование не только современных программных средств (см. расчеты в данной книге), но, конечно, и интернета. Всемирная паутина помогла автору быстро проанализировать тексты Толстого и других упомянутых в книге писателей, легко найти нужные цитаты. Если раньше на такую работу уходили часы или даже дни и недели (на листание книг дома и в библиотеках), то сейчас такой поиск в электронных книгах стал секундным делом. Главное, чтобы электронный текст нужной книги не был разбит на главы отдельными файлами и не было бы в тексте переносов, затрудняющих глобальный поиск.

Кстати, о переносах. Автор, редактор и корректор очень старались выявить и исправить в этой книге неверные компьютерные переносы, режущие глаз читателя. Но нет полной уверенности, что эта кропотливая работа доведена до конца. Все меньше и меньше остается на Земле людей, набиравших когда-то тексты на пишущей машинке, легкий звонок которой предупреждал о скором конце строки – о том, что надо подумать о правильном переносе слова, если оно уже не умещается на текущей строке. Это было одним из показателей бережного отношения к слову. Мало кто уже помнит и о том, что знак переноса дефис (короткое тире) имел двойника в виде математического символа равенства. На пишущих машинках печатали «кое=как», «кое=где», «Фру=Фру» и т.д., предупреждая наборщика о том, что это не знак разрыва слова для его переноса на следующую строку, а дефис – именно дефис, а не тире, короткое или длинное. Лев Толстой, кстати, дожил не только до Русско-японской войны, но и до… пишущих машинок. В интернете можно найти фото, запечатлевшее для потомков, как Лев Николаевич диктует текст своей дочери Александре, сидящей за пишущей машинкой. Там же можно найти и занятные «фотожабы» – Софья Андреевна набирает текст на компьютере под диктовку своего мужа. Сейчас в ходу «компьютерные Софьи Андреевны» – мы диктуем, а компьютер или смартфон переводит звук в текст. И это слово через интернет моментально разносится по всему свету.

Хорошо бы также все произведения Толстого, а не отдельные его произведения объединить в один файл, а поиск в нем вести более интеллектуально, с привлечением средств искусственного интеллекта. Задавать, например, такие ключевые слова поиска: «В чем смысл жизни?», «Кто виноват?», «Что делать?», «Куда мы идем?», «В чем прав, а в чем неправ Толстой?» и т.д и т.п. Неплохо было бы дополнить такие тексты гиперссылками, поясняющими те или иные места в толстовских текстах, которые становятся для многих все более неясными по мере отдаления от них во времени и пространстве. Не будет лишним, если такие гиперссылки будут открывать список иллюстраций книг Толстого, сцен из экранизаций и театральных постановок.

Тексты Толстого теперь так же несложно не только читать, но и слушать на интернет-ресурсах в разном исполнении, отмечая для себя, что у такого-то чтеца лучше озвучиваются батальные сцены, у такого-то – любовные, а у такого-то – философские…

В интернет-поисковиках можно сформулировать интересующий вас вопрос и получить огромный объем информации. Так, например, запрос по ключевым словам «Лев Толстой и математика» выдавал информацию только о том, как Лев Николаевич придумывал арифметические и логические задачи для своей школы в Ясной Поляне. Автор надеется, что в будущем по подобным запросам будет появляться информация и из данной книги.

Интернет дал автору возможность инновационно решить математическую задачу книги об ипподроме, проверить правильность и оптимальность ее решения оригинальным способом. Так, задача про красносельский эллипс была размещена на сайте пользователей Mathcad по адресу https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Leo-Tolstoy-and-Mathcad/m-p/707187. Участники этого специализированного сообщества проанализировали условия задачи и дали свои интересные решения. В книгу же пошло авторское решение, которое, по общему мнению, оказалось наилучшим. Так, кстати, в настоящее время коллективно создаются и литературные произведения: на сайте помещается его начало или его фабула, а затем участники этого проекта все вместе работают над ним…

Эра интернета позволяет по-новому не только писать статьи и книги, но и читать их. Можно свободно пользоваться малознакомыми читателю (и «писателю») терминами и понятиями в надежде, что их описание легко найти в интернете. В статье [16], предшествовавшей данной книге, после каждой цитаты указаны том и страницы из собрания сочинений Льва Толстого, откуда взята цитата. Это делалось и для проформы, и для того, чтобы читатель мог быстро найти это место в книге, проверить правильность цитаты, но, главное, понять, в каком контексте она находится. А можно просто скопировать цитату в интернет-поисковик и…

Все это хорошо, но, как уже было сказано ранее, мутные потоки непроверенной информации и неприкрытая ложь (фейки) заполнили интернет. Многие вполне адекватные люди заговорили о необходимости цензуры с привлечением методов искусственного интеллекта. Мир стал настолько тесен, что страны с разным менталитетом вынуждены толкаться на ограниченном пространстве, конфликтно пересекаясь друг с другом. Вполне серьезно заговорили о том, что цельный Мир нужно фрагментировать – разделить неким железным занавесом на отдельные зоны хотя бы на некоторое время (идея многополярного мира). Так после ряда кораблекрушений пассажирские океанские лайнеры стали конструктивно разделять на отсеки, которые герметично закрывают в преддверии бури – в предчувствии глобальной Войны. Все это будет описано в ранее упомянутом романе «Гибридная война и цифровой мир», если, конечно, будет кому все это описывать.

18. ЭПИГРАФ КНИГИ, ПОМЕЩЕННЫЙ НЕ В НАЧАЛЕ, А ПОЧТИ В КОНЦЕ

> Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно малую величину[29] и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает теперь ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми.
>
> Эта новая, неизвестная древним, отрасль математики, при рассмотрении вопросов движения, допуская бесконечно малые величины, то есть такие, при которых восстановляется главное условие движения (абсолютная непрерывность), тем самым исправляет ту неизбежную ошибку, которую ум человеческий не может не делать, рассматривая вместо непрерывного движения отдельные единицы движения.
>
> *Лев Толстой «Война и мир». Том третий*

Эти два абзаца – из той части романа, которую мало кто вдумчиво читает. Еще меньше тех, кто это прочел, но что-то понял (см. сноску 8 на стр. 49). Толстой в этом фрагменте «Войны и мира» попытался спроецировать математическую теорию дифференциального и интегрального исчисления на понимание сути исторических процессов, на соотношение войны и мира. В первом абзаце эпиграфа просматривается один из парадоксов Зенона, априори об Ахиллесе и черепахе. Его можно приложить к задаче Толстого о путешествующих из Тулы в Москву мужике и барине (см. рис. 11.11). Допустим, барин передвигается в десять раз быстрее, чем мужик, и находится позади него на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое барин проедет это расстояние, мужик в ту же сторону пройдет сто шагов. Когда барин проедет сто шагов, мужик пройдет

[29] Эти величины, а также производные и интегралы, упомянутые в книге, изучаются в разделе математики под названием *«математический анализ»* – *матанализ*, как говорят студенты. Название (калька с немецкого) не совсем верное – любой раздел математики можно так назвать. В английском языке используется термин Calculus, an infinitesimal calculus – вычисление бесконечно малых величин.

еще десять шагов, и т.д. Процесс будет продолжаться до бесконечности, барин так никогда и не догонит мужика.

В настоящее время к работе по изучению общественных явлений пытаются подключить и математиков, создающих программы для суперкомпьютеров. Но следует отметить, что еще при жизни Толстого появилась квантовая механика, оперирующая минимальными количествами физических величин, которые уже нельзя делить. Так что приведенные выше два абзаца не только несколько корявы с точки зрения языка (а только ленивый не бросает по этому поводу камни в Толстого), но стали не совсем верными с точки зрения науки еще при жизни Льва Николаевича. В 1900 году Планк постулировал фотон. Но в настоящее время по отдельности ни волновая, ни корпускулярная теория света не могут объяснить это физическое явление. Приходится говорить о двойственной сущности света и других физических субстанций. И вообще, физика элементарных частиц стала настолько сложной и запутанной, что ее *«сдать не на единицу»* не сможет не только «Левин-Толстой», но и многие сильные студенты. Часто студенты на экзамене имитируют сдачу этого предмета, а преподаватели соглашаются на эту имитацию: *«Ах, обмануть меня не трудно!.. Я сам обманываться рад»*.

При жизни Толстого произошла и другая важная революция в физике, в физическом понимании мира. Еще до того, как профессор Кругосветлов из «Плодов просвещения» (написано в 1890 году) утверждал, что *«математические вычисления подтвердили неопровержимо существование невесомого эфира, дающего явления света и электричества»*, Максвеллом была предложена схема физического эксперимента (1868), который после изобретения интерферометра в 1881 году провел американский физик Майкельсон. Этим опытом было доказано, что эфира (всепроникающей среды, колебания которой проявляют себя как электромагнитные волны) не существует. Эти исследования увенчались тем, что в 1905 году Эйнштейн постулировал общую теорию относительности. Толстого, безусловно, все это должно было интересовать, хотя бесспорность и важность этих открытий стала понятна уже после смерти Льва Николаевича.

19. ОВАЛ ТОЛСТОГО

Автор книги – преподаватель вуза. Это часто мешает ему наслаждаться художественной литературой. Дело в том, что автору приходится редактировать тексты, написанные его студентами и аспирантами, – рефераты, курсовые и дипломные работы, диссертации. Здесь нужно обращать внимание не только на научно-техническую суть написанного, но и на стилистическую сторону работ[30]. Вот этот-то редакторский зуд и мешает автору «наслаждаться художественной литературой». Его так и подмывает отредактировать даже корифеев. Того же Льва Николаевича. Про эллипс-овал ипподрома мы уже написали: «круг эллиптической формы» режет слух человека, мало-мальски знакомого с элементарной геометрией: круг – это круг, а эллипс – это эллипс. Круг – это частный случай эллипса, если под эллипсом понимать плоскую геометрическую фигуру, ограниченную эллипсом, а не плоскую замкнутую кривую второго порядка.

Читаем еще в «Анне Карениной»: *«У крыльца уже стояла* ***туго*** *обтянутая железом и кожей тележка с* ***туго*** *запряженною широкими гужами сытою лошадью. В тележке сидел* ***туго*** *налитой кровью и* ***туго*** *подпоясанный приказчик, служивший кучером Рябинину»* (полужирный шрифт автора). Если бы что-то подобное написал школьник в своем сочинении, то учительница бы все это позачеркивала красной ручкой и отметила, что нельзя одно наречие «туго» использовать аж четыре раза в двух соседних предложениях. Классическая беллетристика запрещала использовать одно слово дважды на одной странице! Но, читая Толстого дальше, начинаешь понимать, что этим четырехкратным «туго» великий писатель хотел выразить что-то особое. То, например, что Рябинин, приехавший покупать лес у Стивы

[30] С орфографией и пунктуацией проблем стало меньше благодаря компьютерному спел-чекеру. Но нужно быть настороже – компания-кампания, концессия-конфессия, смесь-спесь и т.д. Иногда такие опечатки оказываются прямо по Фрейду. Кроме того, сам спел-чекер может такогоназаменять! Одна из основных задач при проверке студенческих работ – это, конечно, отслеживание плагиата. Абсолютно стилистически выверенная и грамотная студенческая работа часто указывает на то, что у кого-то что-то украдено.

Облонского (см. сноску 5 на стр. 42), был очень *туг* в торгах. Он не только не добавил денег за лес (а на этом настаивал Левин, утверждая, что Облонский попался в лапы к мошеннику), но даже хотел еще сбавить цену. Или то, что Облонскому нужно *потуже* затянуть свой пояс и не разбрасываться деньгами – своими, а больше чужими, жениными... *«Красносельский ипподром был туго стянут эллипсом»*. И такого стилистического изыска можно было ожидать от Толстого в «Анне Карениной». Есть необычные деревянные бочки с не круглым, эллиптическим сечением. Их туго стягивают железные обручи.

Что-то подобное можно встретить и в «Саге о Форсайтах». А вольная или невольная связь этого романа Джона Голсуорси с «Анной Карениной» бесспорна, и мы это уже не раз отмечали. *«Они оставили на набережной лоснящийся экипаж с лоснящимися лошадьми и слугами в лоснящихся цилиндрах...»* (*They left the shining carriage, with the shining horses and the shining-hatted servants on the Embankment...*). И такое тройное повторение одного слова сделано намеренно. Совсем скоро «лоск» этой семьи сильно потускнеет в ходе бракоразводных процессов – удавшегося у Сомса Форсайта и неудавшегося у его сестры. Описание попыток бракоразводного процесса есть и в «Анне Карениной».

И еще о стилистике Толстого. Лев Николаевич в своих произведениях слишком часто использует слова «прелесть», «прелестно». В «Анне Карениной» 103 слова, начинающихся с буквосочетания «прелест». Можно предположить, что во времена Толстого это не бросалось в глаза, а сейчас это выглядит назойливо.

Возвращаясь к толстовской цитате с «эллиптическим кругом», можно предположить, что Толстой, наблюдая за лошадьми на скачках, представлял себе... спутники, вращающиеся вокруг планеты по эллиптическим или круговым орбитам – см. раздел 8. Отсюда и возник этот «круг эллиптической формы» вместо овала.

Если в математическом определении эллипса *сумму* заменить на *произведение*, то мы получим так называемый *овал Кассини*. Этот овал (рис. 19.1) можно назвать *умножающим эллипсом* по аналогии с обычным эллипсом – *суммирующим эллипсом* [21]. Овалы Кассини – это геометрическое место точек на плоскости, произведение расстояний от которых до двух фокусов (L_1 и L_2) является постоянной величиной; последнюю обычно маркируют как a^2.

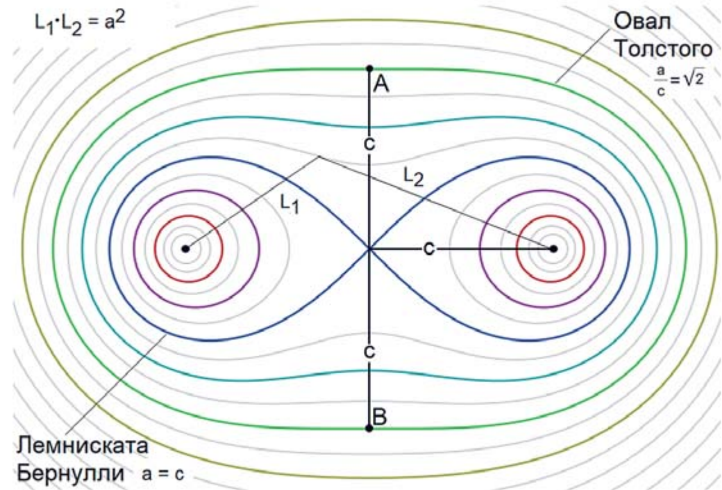


Рис. 19.1. Овалы Кассини при фиксированном межфокусном расстоянии 2*c* и при разных значениях параметра *a*

На сайте https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Cassini-ovals-Plot/m-p/766423 обсуждаются методы построения овалов Кассини в среде Mathcad.

Овал Кассини (замкнутая кривая уже не второго (эллипс), а четвертого порядка) – это, наверное, самая подходящая кривая для ипподрома, и вот почему.

Если увеличивать параметр *a* (произведение расстояний – см. левый верхний угол на рис. 19.1), квадрат которого равен произведению длин отрезков L_1 и L_2, то сначала из двух точек-фокусов вырастут два грушевидных овала, которые при $a = c$ (c – это половина межфокусного расстояния) коснутся друг друга, образуя так называемую лемнискату Бернулли. Эта синяя кривая с формой символа бесконечности сама по себе красива, а ее имя еще красивее (лемниската – «увитая лентами»). Далее формируется единый овал с «талией», которая будет утолщаться и в определенный момент (о нем ниже) пропадает. Все это толкает к мыслям о возникновении семьи (читайте Льва Толстого!). При стремлении *a* к бесконечности и овал Кассини, и эллипс стремятся к окружности (вспомним толстовский «круг эллиптической формы»). Это можно уподобить смерти, о которой Лев Толстой много писал (сцены кончины Андрея Болконского и брата Левина, бессмертная повесть «Смерть Ивана Ильича» и др.). Молодыми мы стараемся пропустить эти печальные страницы произведений Толстого и других писателей (см. сноску 8 на стр. 49). Повзрослев, мы их читаем с большим интересом. Если же идти в обратную сторону – уменьшать значение *a*, то получится вполне реалистичная картина деления живой клетки: у клетки появляется «талия», которая постепенно утончается, что в конце концов и делит клетку. Фокусы здесь выступают в качестве неких ядер клеток. Символично, что сразу после смерти брата Левин узнал о том, что у него будет ребенок.

Джованни Кассини (1625–1712) полагал, что его овал лучше описывает движение двух небесных тел, чем эллипс. Но он оказался неправ. Давайте придумаем применение для овала Кассини, чтобы поддержать его.

Среди овалов Кассини (см. рис. 19.1) есть такой, у которого в двух противоположных по вертикали вершинах не только первая, но и вторая производная равна нулю (пропадает «талия»), а участки овала вблизи этих точек почти прямолинейны. На рис. 19.1 эти точки обозначены буквами *A* и *B*. Вот у этих-то участков овала Кассини и нужно устраивать трибуны для зрителей, беседки, тотализатор. При необходимости этот овал можно разрезать пополам по линии *A*–*B*, а получившиеся полуовалы раздвинуть в стороны, соединив их концы отрезками прямых. Кривизна такой замкнутой линии не будет меняться ступенькой – см. сноску 1 на стр. 14. Подобные кривые, у которых кривизна плавно меняется от нуля (прямолинейный участок) до заданного значения (дуга окружности), используются при проектировании железнодорожных путей, и мы это уже отмечали. А именно там, на этих путях, произошла первая встреча Анны Карениной с Алексеем Вронским, и там трагически закончилась жизнь этой героини романа Толстого. Можно с большой вероятностью предположить, что Анну Каренину переехал не просто

товарный вагон, а вагон-цистерна. В те времена они как раз появились на железных дорогах России, в частности на Нижегородской дороге. В них возили керосин из Нижнего Новгорода в Москву. А в Нижний Новгород керосин поступал по Волге с бакинских нефтепромыслов. Продольный разрез железнодорожной цистерны имеет форму… ипподрома – две дуги, концы которых соединены отрезками прямых. А дуги это не простые – это половинки эллипса (эллиптические днища цистерн, вернее, котлов – так эти емкости называют инженеры-железнодорожники).

Среди овалов Кассини есть один именной – это уже упомянутая лемниската Бернулли, которая на овал ну никак не похожа. У такого «овала», повторяем, $a = c$. А вот настоящему овалу с двумя нулевыми производными первого и второго порядков, очень подходящему по форме для стадиона, ипподрома или замкнутого испытательного железнодорожного полигона, можно дать имя *овал Толстого*. Обоснованием же для такой номинации будет данная книга. У овала Толстого параметр *a* равен половине фокусного расстояния *c*, умноженной на корень из двух, – вспомним серебряное сечение. Это имя данной замкнутой кривой по инициативе автора упомянуто в энциклопедии математических кривых и поверхностей (см. https://mathcurve.com/courbes2d.gb/cassini/cassini.shtml).

Если периметр овала Толстого будет равен четырем верстам (ипподром на красносельском лугу), то у него будут такие габариты: большой диаметр 1635 метров (1,533 версты), малый диаметр 944 метра (0,885 версты). Расстояние между фокусами будет равно малому диаметру – если в такой овал вписать окружность, то она пройдет через фокусы и получится некое *око Толстого*. Но такой ипподром веревкой или дальномером уже так просто не разметить. Нужно будет придумать что-то другое. Размеры овала Толстого на красносельском лугу были найдены совместной работой на уже упомянутом сайте https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Tolstoy-Ellipse/m-p/710363. На рис. 19.2 построен овал Толстого с километровой разметкой на осях, соответствующей Красносельскому ипподрому. Внутри этого овала прописан эллиптический интеграл и не обычный, а *эллиптический интеграл Толстого*.

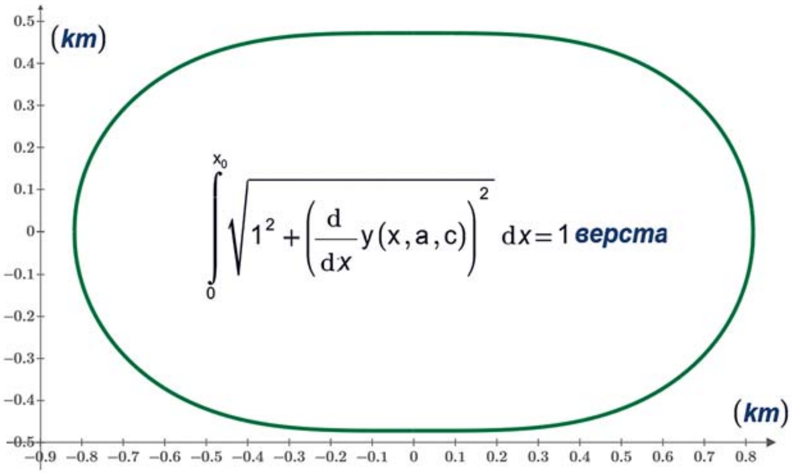


Рис. 19.2. Овал Толстого

В уравнении овала Кассини для прямоугольных координат (извлечение двойного квадратного корня), так и видятся густые брови зрелого Льва Николаевича, нависшие над проницательными глазами (рис. 19.3). Читаем в повести «Юность»: *«Помню, что в одном из прочитанных мною в это лето сотни романов был один чрезвычайно страстный герой с густыми бровями, и мне так захотелось быть похожим на него наружностью (морально я чувствовал себя точно таким, как он), что я, рассматривая свои брови перед зеркалом, вздумал простричь их слегка, чтоб они выросли гуще, но раз, начав стричь, случилось так, что я выстриг в одном месте больше, – надо было подравнивать, и кончилось тем, что я, к ужасу своему, увидел себя в зеркало безбровым и вследствие этого очень некрасивым. Однако, надеясь, что скоро у меня вырастут густые брови, как у страстного человека, я утешился и только беспокоился о том, что сказать всем нашим, когда они увидят меня безбровым. Я достал пороху у Володи, натер им брови и поджег. Хотя порох не вспыхнул, я был достаточно похож на опаленного, никто не узнал моей хитрости, и действительно у меня, когда я уже забыл про страстного человека, выросли брови гораздо гуще».*

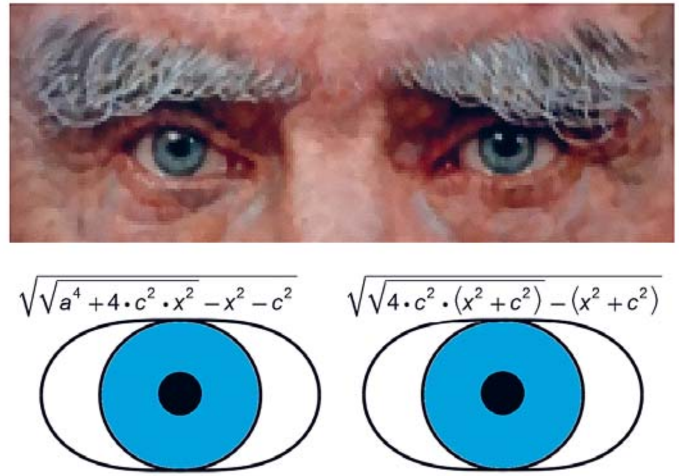


Рис. 19.3 Брови и два «ока Толстого»

На рис. 19.3 слева над правым глазом нависло общее уравнение овала Кассини, а справа над левым глазом – уравнение овала Толстого.

Овал Толстого, кстати говоря, больше подходит для сечения железнодорожной цистерны, чем обычный эллипс. Дело в том, что кривизна кривой, образующей продольный контур теперешней цистерны на стыке днища с ее цилиндрической частью, будет меняться скачком, если базироваться на обычном эллипсе. А это нехорошо в отношении аэродинамики движения железнодорожной цистерны. Но это можно сгладить, если использовать овал Толстого для днищ таких емкостей на колесах. Сейчас цистерны изготавливаются так: стальной лист прямоугольной формы сворачивается в цилиндр, к которому приваривают два днища, изготовленные на мощном прессе. В будущем все это будет печататься на 3D-принтерах. А там можно изготовить такую цистерну любой формы – и с продольным сечением овала Толстого.

Есть не товарный, а пассажирский именной поезд «Лев Толстой». Он ходит, вернее, когда-то ходил между Москвой и Хельсинки. Название немного циничное, если вспомнить «Анну Каренину». Слава богу, что не пустили этот поезд по маршруту Москва – Нижний Новгород с остановкой на станции со старым названием Обираловка. Автор в студенческие годы участвовал в необычной и тоже несколько сомнительной постановке этого романа. Действующими лицами в ней были такие: Анна Каренина, Паровоз, Вагоны, Шпалы и Рельсы…

Примечание к рис. 19.2. Вычисление определенного интеграла, прописанного в середине овала Толстого, приводит к… ошибке. Дело в том, что на правом конце интегрирования, когда x равна x_0, производная функции $y(x, a, c)$ по x равна бесконечности (там, напоминаем, лошадь Вронского Фру-Фру «ушла в бесконечность»). Выходов из этого ненормального положения два. Во-первых и грубо, следует интегрировать не до значения x_0, а до x_0 минус один миллиметр, например. Во-вторых и более утонченно, нужно переходить от декартовых к полярным координатам (см. рис. 13.10). С классическим эллипсом такого сбоя в вычислениях не наблюдалось (см. рис. 4.6 и 5.1). Почему? Здесь нужно опять же вдаваться в суть численных методов интегрирования и рассуждать об их приближенности. И еще раз вспомнить про отношение Левина-Толстого к интегральному исчислению.

Имена людей часто присваивают безымянным небесным объектам – астероидам, например, – даже если эти люди и не имеют прямого отношения к небесным телам. Безымянными же эти объекты были потому, что либо не установлено имя астронома, открывшего это небесное тело, либо просто не хватает астрономов для всех подобных номинаций. Неплохая идея – давать имя человека не только небесным телам, но и математическим объектам. Многие из них уже носят имена своих первооткрывателей. Безымянные математические объекты могут получить имена знаменитых людей, не имеющих прямого отношения к математике. Овал Толстого – и звучит красиво, и отсылает нас

к одному из величайших произведений мировой литературы – к роману «Анна Каренина», автор которого имел особые сложные отношения с математикой вообще и с эллипсом и интегралом в частности. Пропорции же овала Толстого (отношению малого диаметра к большому, вернее, малой полуоси к большой полуоси – см. рис. 19.2), равной квадратному корню из трех, деленному на три (это примерно 0,577), можно также присвоить имя Льва Толстого. Напомним, что сверхзолотая (платиновая, можно сказать) пропорция равна 0,682, золотая – 0,618, а серебряная – 0,414 (все также примерно). Пропорция Толстого (0,577) лежит между золотой и серебряной пропорциями, а само творчество Толстого было на стыке золотого и серебряного веков русской литературы. Форма беговой дорожки «гипподрома» на красносельском лугу могла быть такой: это овал Толстого (частный случай синего овала Кассини) с двумя прямолинейными красными вставками длиной x, доводящими пропорции овала до серебряного сечения (рис. 19.4). Мы как бы слегка растянули овал Толстого, превратив его в некое подобие *эластики* Толстого [26]. Эластики – это особый вид кривых, впервые исследованных Эйлером и получаемых при сжатии или растяжении стержней.

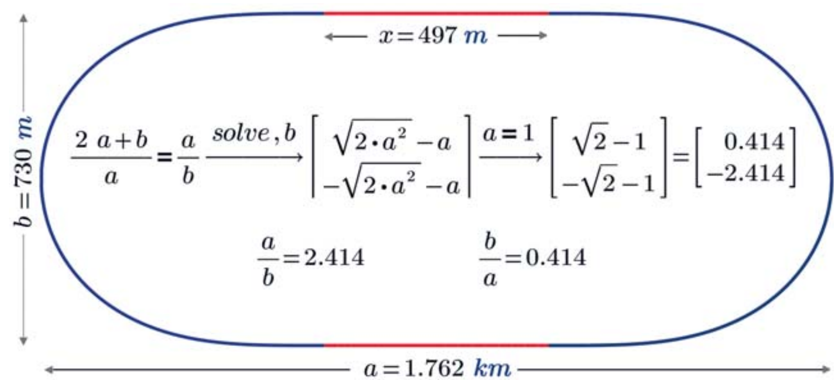


Рис. 19.4. Форма беговой дорожки Красносельского ипподрома: овал Толстого, расширенный до серебряной пропорции

$$\textbf{верста} := 500 \cdot 7 \cdot ft = 1.067\ km$$

$$y(x,c,x) := \sqrt{\sqrt{4\,c^2\left(\left(x-\frac{x}{2}\right)^2+c^2\right)}-\left(x-\frac{x}{2}\right)^2-c^2} \quad \text{Oval Cassini}$$

Решить

Начальные приближения

$$\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \end{bmatrix} m$$

Ограничения

$$\frac{2\left(\sqrt{3}\,c+\frac{x}{2}\right)+c}{\sqrt{3}\,c+\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}\,c+\frac{x}{2}}{c} \quad \text{Silber ratio}$$

$$\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+\sqrt{3}\,c} \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}y(x,c,x)\right)^2}\,dx+\frac{x}{2} = 1\ \textbf{верста}$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix} := \text{Find}(x,c) = \begin{bmatrix} 497.277 \\ 364.486 \end{bmatrix} m$$

Рис. 19.5. Загадочное решение задачи о серебряном ипподромном овале Толстого

В произведениях, высказываниях и письмах Л.Н. Толстого можно заметить нескрываемое положительное отношение к людям математики: *«Мальчик выдавался блестящими способностями и огромным самолюбием* (вспомним самолюбие Левина-Толстого и интегральное вычисление), *вследствие чего он был первым и по наукам, в особенности по математике, к которой он имел особенное пристрастие»* («Отец Сергий»); *«Учился он легко и в гимназии и в университете и кончил курс первым кандидатом математического факультета. Ему предлагали оставаться при университете и ехать за границу»* («Воскресение»). Можно отметить некую белую зависть Толстого к своим героям, знающим математику. Тургенев писал: *«Сошелся я в поле... с одним страстным охотником и, следовательно, отличным человеком»* («Хорь

и Калиныч»). Толстой же мог так сказать: *«Он был страстным математиком, следовательно, отличным человеком»*. И это несмотря на наше кардинальное изменение в отношении охоты для забавы (см. стр. 116–117).

Для страстных математиков мы помещаем на рис. 19.5 решение задачи о серебряном ипподромном овале Толстого (см. рис. 19.4). В этом решении спрятаны две программно-математические загадки, которые мы и предлагаем разгадать страстным математикам. Без этого программа будет выдавать не численные ответы (497 и 364 метра), а сообщение об ошибке.

20. ОВАЛЬНЫЙ ПОРТРЕТ И СТАТИСТИКА

На рис. 20.1 показаны два овала «эллиптической формы» с одинаковыми периметрами и с разными отношениями малого (горизонтального) диаметра к большому (вертикальному) диаметру. Слева золотой эллипс, а справа серебряный (см. также рис. 6.1). Какой эллипс выбрал бы читатель для зеркала на стене или для рамы… портрета Льва Толстого (см. ниже)?

Рис. 20.1. Золотая и серебряная рамки для картин овальной формы

Мы уже упоминали о том, что в кабинете Каренина *«над креслом висел овальный, в золотой раме, прекрасно сделанный знаменитым художником портрет Анны»*. Золотой и серебряный эллипсы, показанные на рис. 20.1, можно использовать в качестве трафарета для рамы данного портрета – золотой для поясного портрета, а серебряный для портрета в полный рост. Хотя портреты в полный рост редко делают овальными. И еще. Рамы портретов – прямоугольных или овальных – имеют разные пропорции, далеко не всегда золотые или серебряные. Но толщина самой рамы – расстояние от ее внутреннего края до ее внешнего края – должна быть такой, чтобы в раму вписались овалы-эллипсы с золотой или серебряной

пропорцией. Так что слова Толстого про золотую раму овального портрета Анны Карениной можно отнести не только к сусальному покрытию рамы «под золото», но и к ее форме. Отсюда вывод. В кабинете Каренина висел поясной портрет Анны, а не портрет в полный рост. А вот портрет Анны Карениной, написанный художником Михайловым в Италии, был во весь рост. Можно представить его не в золотой, а в серебряной раме – раме и серебряного цвета, и серебряной формы.

В уже упоминавшейся нами «Саге о Форсайтах» есть рассуждения о серебре и золоте в живописи: старый Форсайт любил золото, а молодой Форсайт отдавал предпочтение серебру.

Конечно, никто не размечал «круг эллиптической формы» ипподрома с помощью двух колышков и длинной веревки (см. рис. 4.1). А вот раму для картины овальной формы багетный мастер размечал, скорее всего, так: вбил в деревянную заготовку два гвоздя, привязал к ним веревочку и, натянув ее карандашом, нарисовал нужный эллипс. Да и сам художник мог так размечать контуры будущего овального живописного полотна.

Но нам привычнее живописные полотна в прямоугольных рамах: *«Я с детства не любил овал! / Я с детства угол рисовал!»* (Павел Коган).

Чеховская шутливая табель о рангах писателей (см. сноску 22 на стр. 153) заставляет задуматься еще об одном интересном опросе читателей. Попробуйте дополнить эту табель именами всех известных вам умерших русских писателей! Что у вас получится? Поделитесь результатом с автором этой книги, который позиционирует себя техническим писателем. А технический писатель отличается от писателя, как милостивый государь от государя. Кстати, у Чехова вакантным был не только чин действительного тайного советника, но и высший чин канцлера. Но за всю историю Российской империи канцлеров было меньше, чем царствующих монархов. Так вот, единственным русским писательским канцлером по праву можно «назначить» Льва Толстого (высокопревосходительство). Алексей Николаевич Толстой тянет на чин тайного советника, а Алексей Константинович Толстой – на чин статского советника. Гёте был тайным советником – настоящим, а не шуточным. Салтыков-Щедрин был действительным статским советником. Опять же, настоящим. Говоря о математике, можно упомянуть, что в линейной алгебре есть понятие ранга матрицы. При решении систем линейных алгебраических уравнений ранги основной и расширенной матриц коэффициентов при неизвестных подсказывают, есть ли решение и сколько их. Сейчас литературные произведения и их авторов часто уподобляют некой матрице с закодированной информацией сюжета книги и/или биографии писателя. Если вычислить ранги таких матриц, то результат можно отсортировать по убыванию и получить эту самую табель о рангах писателей и их произведений.

А вот как Самуил Маршак упомянул самого Чехова в некой табели о рангах советских писателей:

Писательский вес по машинам
Они измеряли в беседе:
Гений на «ЗИЛе» длинном,
Просто талант – на «Победе».
А кто не сумел достичь
В искусстве больших успехов,
Покупает машину «Москвич»
Или ходит пешком.
Как Чехов.

Лев Толстой, кстати, в старости научился ездить на велосипеде.

Неизвестно, прокатился ли Толстой хоть раз на автомобиле, но вот какой анекдот, пародирующий школьные (гимназические) ляповатые сочинения о Толстом, появился в журнале «Сатирикон» в 1910 году.

«Совершая пешком с клюкой свою обычную утреннюю прогулку (см. рис. 10.3)*, Лев Николаевич обогнал автомобиль.*

Седоки, а также и шофер, увидев Льва Николаевича, стали просить его остановиться.

Великий писатель исполнил их просьбу, остановился и сказал с укоризной:

– У лошадей хлеб отнимаете.

Седоки смутились и покраснели. Лев Николаевич заметил это и смягчился.

– Куда едете? – спросил он ласково.

– Мы не едем, – ответили спрошенные. – У нас гонки.

– Какие гонки?

– Гонки Петербург – Москва. Кто быстрее доедет до Москвы и возьмет приз. Мы пока находимся впереди всех.

После этих слов шофер издал скверный звук, и автомобиль рванулся с места и полетел.

Но не успел сделать десяти шагов, как налетел на бревно. Шофер, совершенно против своей воли, вылетел из автомобиля и сломал себе ногу.

Пассажиров постигла та же участь.

Сам автомобиль потерял сразу все четыре колеса, кузов и еще какие-то мелочи.

Лев Николаевич мягко заметил ехавшим на автомобиле:

– Этак вы можете отстать.

И легкой вегетарианской походкой он бодро продолжил свою прогулку».

В этом анекдоте можно увидеть глубокий философско-исторический смысл. Человечество обогнало Льва Толстого и «въехало» в трагические века, номера которых начинаются с двойки. Чем все это закончится – никто не знает…

21. УГАДАЙ ТОЛСТОГО

Большинство опрошенных выбирают для зеркала или картины золотой, а не серебряный эллипс (см. рис. 20.1). В подобном эллипсе можно реализовать такую интересную компьютерную игру [9]: на белом фоне появляются черные или цветные точки (рис. 21.1), которые постепенно вырисовывают растровый портрет узнаваемого человека, Льва Толстого например. Кто первый угадает образ, тот и победитель в этой интеллектуальной компьютерной игре. При каком значении *n* (число выведенных случайным образом растров) играющий угадает Льва Толстого (рис. 21.1)? Такую визуальную игру «Угадай образ!» можно провести со всеми русскими писателями. Самым трудноузнаваемым в этой игре будет образ Льва Толстого, но не «традиционный», а без бороды – ранние портреты и фотографии Льва Николаевича (рис. 21.2 – у Толстого торчат уши; он описывал Каренина, подобрав волосы и глядя в зеркало; в «Саге о Форсайтах» все нелюбимые мужья имели оттопыренные уши; можно предположить, что Софья Андреевна по-настоящему полюбила Левочку только тогда, когда он прикрыл уши волосами на голове и лице). А вот бы попросить фотошопщиков выполнить историческую реконструкцию портрета пожилого Толстого – убрать с фотографий и портретов (с портрета кисти Репина, например) усы и бороду, подстричь брови и волосы на голове... А это несложно сделать в наш компьютерный век, и уже сделано (ищите в интернете!). Или, наоборот, пририсовать бороду учителю математики в сельской школе, превратив его в Льва Толстого в его Яснополянской школе. Что, кстати, и представлено выше (см. рис. 11.6).

Кстати, про бороды и вообще про волосяной покров на голове человека.

Вронский отпустил бороду, когда стал жить в своем имении с Анной. Об этом факте, который упорно игнорируют авторы многочисленных экранизаций и театральных постановок, свидетельствует такая цитата из романа: *«– Ну, я очень рад. А ты здорова? – сказал он* <Вронский>, *отерев платком*

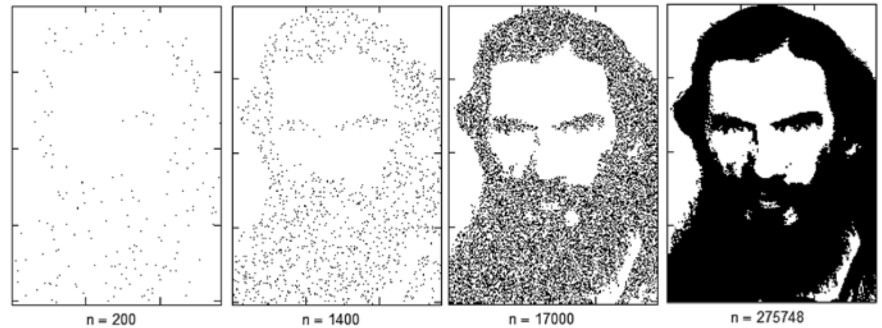


Рис. 21.1. Угадай образ... Льва Толстого с бородой

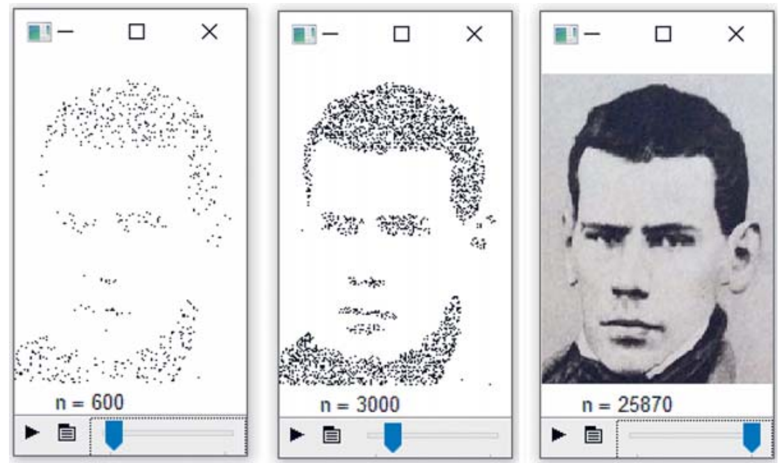


Рис. 21.2. Угадай образ... Льва Толстого без бороды

мокрую бороду и целуя ее <Анны> *руку*». Но это, надо думать, была не традиционная толстовская борода лопатой (см. рис. 21.1 и 21.3), а, скорее всего, аккуратная, модная по тем временам эспаньолка, которую могли себе позволить неслуживые люди с налетом либерализма. А такой налет у Вронского просматривался. С другой стороны (с другой части головы), Вронский стал лысеть еще до того, как отпустил бороду:

«– Ты бы волоса обстриг, а то они у тебя тяжелы, особенно на лысине. Вронский действительно преждевременно начинал плешиветь». Если быть точным, то следует отметить, что лысина – это место на голове человека, где не растут волосы, а должны бы расти. Плешь же – это лысина, окруженная волосами. Говоря языком математики, множество «плешь» входит в множество «лысина». Хотя слово «плешь» сейчас приобрело некий отрицательный оттенок по сравнению со словом «лысина». Короче говоря, Вронский с возрастом стал все более и более походить на… самого Толстого. В этом отношении с Толстым пытаются сравнивать… Солженицына, у которого было очень много идейности и почти не было художественности (см. выше). Солженицына сравнивают с Толстым, конечно, не только из-за внешности, но и по их роли в общественной жизни последних двух рубежей веков. Солженицын – это Толстой, но без «Войны и мира» и «Анны Карениной», а только с «Воскресением». Воскресением не отдельного человека (Дмитрия Нехлюдова), а всей страны. Вернее, с очередной попыткой такого воскресения – перехода страны в ряд цивилизованных стран в плане уважения личности и прав человека.

Но вернемся к математике.

Растры рис. 21.1 и 21.2 могут служить исходными точками для решения задачи… коммивояжера (см. раздел 10). Если воспользоваться жадным алгоритмом ближайшего соседа (см. рис. 10.1) и соединять точки портрета отрезками прямых – дорожками коммивояжера, то при увеличении числа точек получится детская каляка-маляка.

Но есть и объективные методы оценки оптимальности алгоритмов и программ решения задачи коммивояжера. Во-первых, дорожка коммивояжера должна быть без петель, во-вторых, длина пути коммивояжера не должна зависеть от выбора точки старта, и, в-третьих, длина первой половины пути коммивояжера должна быть примерно равна длине второй половины пути. Этого нет при использовании простейшего жадного алгоритма ближайшего соседа (см. рис. 10.1). Очень многие беды отдельных людей и человечества в целом проистекают из того, что, планируя свою жизнь,

они пользуются жадными алгоритмами оптимизации и не видят будущего дальше своего носа. Сэкономил копейки на первых шагах – потерял миллионы в дальнейшем. Это касается не только материальной, но и духовной стороны жизни. Как писал Михаил Булгаков, *«для того, чтобы управлять, нужно, как-никак, иметь точный план на некоторый, хоть сколько-нибудь приличный срок. Позвольте же вас спросить, как же может управлять человек, если он не только лишен возможности составить какой-нибудь* <оптимальный> *план хотя бы на смехотворно короткий срок, ну, лет, скажем, в тысячу, но не может ручаться даже за свой собственный завтрашний день?»*

Но более совершенные алгоритмы (муравейный-муравьиный, например) дадут вполне приемлемую картинку в стиле TSP Art (TSP – Travelling Salesman Problem [25]), где будут тесно переплетены Лев Толстой и математика, наука и искусство (рис. 21.3). В буквальном и в переносном смысле.

На рис. 21.3 портрет Льва Толстого кисти Ильи Репина, написанный в 1901 году, был сначала переписан в стиле пуантилизма (отдельными точками – см. рис. 21.1 и 21.2). Затем по этим точкам «прошелся коммивояжер», оставляя след. «Коммивояжер» в каждой точке был один раз, а его путь оказался минимальным. TSP-портрет великого писателя имеет одно неоспоримое преимущество – на оригинале портрета Репина Лев Николаевич изображен босым, а это очень не нравилось Толстому. Говорят, что когда он узнал о таком своем портрете, то написал Репину: *«Благодарю вас, Илья Ефимович, что, разув меня, вы оставили на мне хотя бы панталоны»*. На TSP-портрете Толстой изображен как бы в носках. Иван Бунин зачем-то повесил портрет босоногого Толстого в квартире героини рассказа «Чистый понедельник».

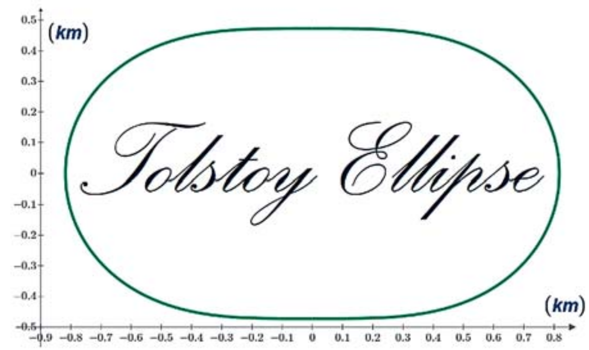
Задание читателю-математику: усложнить игру «Угадай образ» так, чтобы не просто появлялись отдельные растры на рисунке, а чтобы эти очередные точки были соединены дорожками коммивояжера по генетическому или муравьиному алгоритму, которые затронуты в этой книге. Интересно, как играющий будет узнавать Толстого на рис. 21.3? По бороде, по толстовке или по каким-то другим атрибутам?

Рис. 21.3. Портрет Толстого в стиле TSP Art

TSP-портрет Толстого по просьбе автора выполнил Билл Кук (Bill Cook) – администратор сайта http://www.math.uwaterloo.ca/tsp и соавтор книги [24].

На этом довольно забавном артефакте можно и закончить эту «довольно забавную» книгу!

А в качестве виньетки, завершающей книгу, мы помещаем эллипс Толстого – «четырехверстный круг эллиптической формы», ставший поводом к написанию этой книги.



ПОСЛЕСЛОВИЕ

Во время работы над первым и вторым изданиями данной книги с Россией случилось то, что с какой-то роковой периодичностью случается с ней в начале каждого века. Не будем слишком далеко углубляться в историю, но… Начало XVII века – Смутное время и польская интервенция, начало XVIII века – Северная война с ее ключевой Полтавской битвой, начало XIX века – нашествие Наполеона, начало XX века – Первая мировая и гражданская войны, начало XXI века – украинский кризис, который неизвестно еще когда и как завершится. Но и в середине веков тоже не все было спокойно: XIX век – Крымская война, XX век – Великая Отечественная… Исторический маятник качается то в одну то в другую сторону (от войны к миру) с периодом примерно в полвека. Войну с Наполеоном и Крымскую войну мы можем изучать по произведениям Льва Николаевича. История взаимоотношений России и Запада начала XXI века ждет своего Толстого. Как вам понравится такое название будущего романа: «Гибридная война и цифровой мир»? А в обновленной «Анне Карениной» в дополнение к княгине Тверской и графу Серпуховскому может появиться барон Калининградский – местный криминальный авторитет.

Можно попробовать переписать рассказы, повести и романы Льва Толстого для нового цифрового поколения читателей… Долли не находит записку, а случайно читает СМС на экране смартфона, неосторожно оставленного дома ее мужем. Из-за этого «все смешалось в доме Облонских». Каренин не отталкивает Анну от ее письменного стола для того, чтобы вытащить из ящика письма Вронского. Он вырывает из ее рук смартфон и читает всю любовную переписку. Или дело было не так грубо. Каренин просит айтишника из своего министерства взломать аккаунты Анны в социальных сетях и мессенджерах… В пылу ревности Каренин проверяет с помощью ДНК-теста, является ли Сережа его сыном. Наполеон перед походом в Россию не печатает миллионы фальшивых рублей, а блокирует счета русской аристократии во французских банках и проводит хакерские атаки на российские госучреждения… Но все это глупые фантазии… Для написания нового подобного романа нужно, чтобы Россия родила нового Льва Толстого!

Но есть и непреходящие особенности российского общества. Читаем в «Воскресении»: *«Нехлюдов говорил довольно ясно, и мужики были люди понятливые; но его не понимали и не могли понять по той самой причине, по которой приказчик долго не понимал. Они были несомненно убеждены в том, что всякому человеку свойственно соблюдать свою выгоду. Про помещиков же они давно уже по опыту нескольких поколений знали, что помещик всегда соблюдает свою выгоду в ущерб крестьянам. И потому, если помещик призывает их и предлагает что-то новое, то, очевидно, для того, чтобы как-нибудь еще хитрее обмануть их»*. В этой цитате достаточно заменить слово «помещики» на слово «власть», а слово «мужики» на слово «народ» и перенести все это в новый роман. Добавилось и то, что народ перестал верить не только власти, но и «независимым» СМИ – и в России, и во всем мире. А вот что говорил Вронский в «Анне Карениной»: *«– Я не имею удовольствия знать этого господина Левина, – улыбаясь, сказал Вронский, – но, вероятно, он никогда не видал тех машин, которые он осуждает. А если видел и испытывал, то кое-как, и не заграничную, а какую-нибудь русскую. А какие же тут могут быть взгляды?»* Увы, технологические и общественно-политические особенности России – царской, советской и современной, – зафиксированные в двух цитатах, до конца не нивелированы в наше время. И причина в том, что Россия была и осталась страной чиновников и силовиков, а не людей дела, предпринимателей. Эта одна из причин того, о чем писалось в начале этого послесловия.

Последние события, в частности введенные Западом санкции, заставляют в числе прочего пересмотреть сноску 13 (чертова дюжина) на стр. 55, где сказано, что «человек скачивает с сайта ptc.com полную версию Mathcad, работает с ней месяц, а потом она становится урезанной, если не куплена лицензия на полную версию». Так вот, сейчас из-за санкций нельзя ничего скачать и невозможно за что-то заплатить. Россию снова в пылу русофобии[31]

[31] Русофобия – это хроническая болезнь Европы с периодами рецессий и обострений. Правда, на Западе эту болезнь называют по-другому и считают, что ею болеет не Запад, а Россия. Но истина, как всегда, находится посередине. В произведениях Толстого прослеживается взвешенная оценка этого явления, растянутого на века.

пытаются загнать в медвежий угол. Сайт WolframAlpha.com (а мы на нем много чего решали в книге) тоже могут заглушить в России. Да и основа всех основ – операционная система Windows – тоже у нас висит на волоске. Опять во всей своей остроте встают вопросы «Кто виноват?» и «Что делать?». Снова хочется крикнуть по-толстовски: «Не могу молчать!» Но мы не кричим, а шепчем по «кухням»: «Они что, совсем обалдели?!»

Но, к счастью, у американской программы Mathcad, которая использовалась для решения задач этой книги, есть русский аналог под названием SMath (www.smath.info). Мы уже упоминали о нем в этой книге, и он может быть успешно применен для решения многих математических и инженерных задач в рамках импортозамещения. Тем более что программа SMath работает не только под управлением Windows, но и под управлением альтернативных бесплатных операционных систем. На рис. П1 показана проверка в среде SMath расчета размеров серебряного ипподромного овала Толстого. Напомним, что в расчете на рис. 19.5 была решена система двух уравнений (одно из которых толстовско-интегральное), но не была сделана проверка решения. На рис. П1 эта недоработка исправлена – показано, что найденные значения неизвестных x и c превращают уравнения в тождества (правые и левые части уравнений равны друг другу). Попутно мы исправимся и в другом – отметим, что замкнутую кривую на рис. 19.4 нельзя называть овалом, так как на ней есть прямолинейные участки не с двумя, а с бесконечным числом точек пересечения этой замкнутой линии с прямой линией. Замкнутая кривая на рис. 19.1 не везде выпуклая – это не овал, а упомянутый на стр. 14 стадиум, по бокам которого прочерчены половинки не окружности, а овала Толстого (см. рис. 19.2 и 19.3). Такому геометрическому объекту можно дать имя «стадиум Толстого». Было бы неплохо к 200-летию со дня рождения Толстого построить стадион или ипподром такой формы!

Вверху и в правой части рис. П1 показана только малая часть инструментария SMath, применяемого для решения математических задач: арифметические действия, работа с векторами и матрицами, математическая логика, встроенные функции, графическое отображение решений, реализация сложных алгоритмов

(программирование), работа с греческими буквами, широко используемыми в математике…

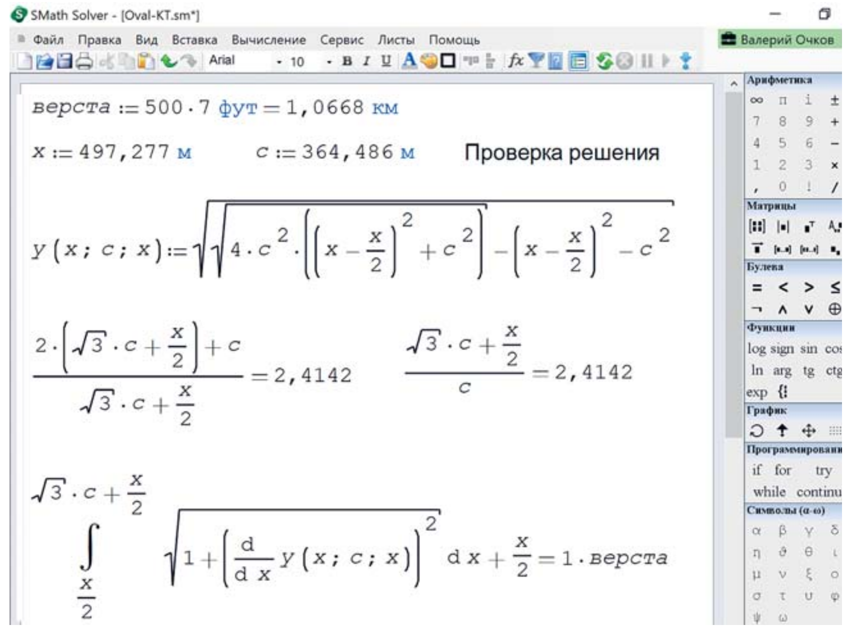


Рис. П1. Проверка в среде SMath решения задачи о серебряном ипподромном овале Толстого

Можно отметить, что в среде SMath целая часть десятичного числа по умолчанию отделяется от дробной части запятой, а не точкой, а вместо запятой в списках (в списке аргументов функции, например) используется не запятая, а точка с запятой. Такая же «славянофильская» нотация имеет место и в русской версии электронных таблиц Excel, которые часто используют для решения научно-технических задач, несмотря на то, что Excel – это в первую очередь инструмент бухгалтера, а не инженера. Немец – управляющий имением Вронского в наше время вытащил бы из кармана не карандаш с записной книжкой (см. стр. 122), а планшет с Excel, чтобы подсчитать экономическую целесообразность использования проволоки при уборке сена. (Заметим вскользь, что в роман

«Анна Каренина» вкралась неточность. Речь шла не о металлической проволоке, которую изготавливают волочением, а, скорее всего, о Draht (русский клон этого слова – дратва). В немецком языке Draht – это и проволока, и тонкая веревка, шпагат. Металлическая проволока в сене опасна для домашнего скота.) Да и самому Вронскому для сведения «дебета с кредитом» (см. стр. 124) электронные таблицы очень бы пригодились. С программой Excel, а скорее всего с пакетом 1С Бухгалтерия, с удовольствием бы поработал еще один немец-бухгалтер – тот, который делал аудит имения Свияжского (см. стр. 128).

Проблема «точка или запятая» просматривается и в этой книге: на многих рисунках (на компьютерных скриншотах – снимках экрана) числа разделяются на две части (на целую и дробную) точкой, а в текстах книги – запятой. Пакеты SMath и Excel убирают эту специфическую российскую двойственность учебников, справочников и монографий. Эта путающая многих неоднозначность проявляется также в машинных переводах текстов.

Электронные таблицы Excel установлены почти на каждом персональном компьютере (пока установлены – см. начало послесловия). С ними (в укороченной версии) можно работать даже и на смартфоне. Они входят в состав приложения Microsoft Office, с которым гуманитарии знакомы в основном по текстовому процессору MS Word. На рис. П2 продублировано решение задачи из «Азбуки» Толстого о перемещении мужика и барина из Тулы в Москву (см. стр. 126–127). Используется не Mathcad, а Excel, в среде которого оперируют не переменными, а ячейками таблицы: возьмем число, хранящееся в ячейке C4 (C – нумерация столбцов таблицы, 4 – нумерация строк), отнимем от него число, хранящееся в ячейке C3, и в ячейке C5 узнаем, сколько времени шел мужик до момента выезда барина из Тулы. В столбце E показано, какие арифметические действия проводятся в таблице для получения ответа, выведенного «на печать». Если изменить числа в ячейках C1:C4 (исходные данные задачи), то мы получим новый ответ. Пакет Mathcad, а следом за ним и пакет SMath создавались в том числе и для того, чтобы оторвать инженеров от электронных таблиц, которые, в частности, не могут работать

с физическими величинами и имеют вдобавок неудобное для понимания оформление математических формул. Почти все задачи книги опираются не просто на числовые, на физические величины – время, расстояние, масса, скорость, ускорение и т.д.

C9 =C8*C2

	A	B	C	D	E
1		Скорость мужика	5	верст в час	
2		Скорость барина	12	верст в час	
3		Время выхода мужика из Тулы	5	часов	
4		Время выезда барина из Тулы	12	часов	
5	1	Сколько времени шел мужик до момента выезда барина?	7	часов	=C4-C3
6	2	Какое расстояние преодолел мужик до момента выезда барина?	35	верст	=C1*C5
7	3	Какова скорость сближения мужика и барина?	7	верст в час	=C2-C1
8	4	Через какое время барин догонит мужика?	5	часов	=C6/C7
9	5	На каком расстоянии от Тулы барин догонит мужика?	60	верст	=C8*C2

Рис. П2. Решение задачи о мужике и барине в среде Excel

В качестве графического завершения послесловия, да и всей книги, мы помещаем рис. П3 – слегка подправленную довольно известную иллюстрацию Ореста Верейского. Анна выходит из кабинета мужа так и «не взятым интегралом», оставляя Каренина одного с его оттопыренным ухом, овальным портретом жены и с книгой о мистических евгюбических надписях… Иллюстрация глубоко символична. Интеграл Анны Карениной никто до сих пор не мог «взять» окончательно – понять до конца глубину философии и эстетики произведений Льва Николаевича Толстого, открыть их довольно интересные математические смыслы.

Рис. П3. Интеграл, который не смог «взять» ни Каренин, ни Вронский

«Умом Россию не понять, аршином общим не измерить…» Эти строки Тютчева можно понимать и чисто математически. Россия, или то, что раскинулось от Европы до Тихого океана, – это некий *ИНТЕГРАЛ* (см. стр. 16), который до сих пор не «взяли» ни аналитически (*не поняли*), ни численно (*не измерили*). С приемлемым приближением и Анну Каренину, и Россию XIX века «взял» Лев Толстой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИСТОЧНИКОВ

1. Анна Каренина: художественный фильм. URL: https://www.mosfilm.ru/movies/34862/ (дата обращения: 02.04.2022).
2. *Голсуорси Д.* Сага о Форсайтах. Т. 1. URL: https://libcat.ru/knigi/proza/klassicheskaya-proza/32880-2-dzhon-golsuorsi-saga-o-forsajtah-tom-1.html#text (дата обращения: 15.03.2022).
3. Инженерные расчеты: книга-билингва / Очков В.Ф. и др. СПб.: Лань, 2021. 288 с. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Ochkov-V-F-Engineering-Calc.pdf (дата обращения: 07.04.2022).
4. *Коробов В.И., Очков В.Ф.* Химическая кинетика: введение с Mathcad/Maple/MCS. М.: Горячая линия – Телеком, 2009 (2-е изд. – 2015). 384 с. URL: http://twt.mpei.ac.ru/TTHB/New-Chem-Kin/En-Ru-book.html (дата обращения: 15.03.2022).
5. *Очков В.Ф.* Mathcad и криптография // Информатика в школе. 2013. № 10. С. 57–58. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/MATHCAD-CRYPTOGRAPHY.pdf (дата обращения: 15.03.2022).
6. *Очков В.Ф.* Mathcad и некоторые тайны художественной литературы // Домашний компьютер. 2000. № 5. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Gerasim/Gerasim.htm (дата обращения: 15.03.2022).
7. *Очков В.Ф.* Комета 1812 года: проверим алгеброй гармонию // Физика в школе. 2022. № 1. С. 26–32. URL: http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_v_shkole_2022_01.pdf (дата обращения: 02.04.2022).
8. *Очков В.Ф.* Трехсторонняя дуэль в Монте-Карло // Информатика в школе. 2013. № 9. С. 55–60. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/duel-pdf.pdf (дата обращения: 15.03.2022).
9. *Очков В.Ф.* Угадай образ // Информатика в школе. 2011. № 9 (73). С. 60–62. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/SolveImage.html (дата обращения: 15.03.2022).
10. *Очков В.Ф., Бобряков А.В., Хорьков С.Н.* Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. 2017. Т. 4. № 2. С. 5–26. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Hybrid.pdf (дата обращения: 15.03.2022).
11. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П.* Интерполяция, экстраполяция, аппроксимация или Ложь, наглая ложь и статистика // Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 1. С. 61–88. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/stat.html (дата обращения: 15.03.2022).
12. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П.* Это страшное слово «диффуры»… // Информатика в школе. 2015. № 1. С. 55–58. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

13. *Очков В.Ф., Боголомова Е.П., Иванов Д.А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: Лань, 2018. 560 с. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

14. *Очков В.Ф., Боголомова Е.П., Иванов Д.А., Писачич К.* Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 2. С. 177–215. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

15. *Очков В.Ф., Васильева И.Е.* Применение разностных схем к решению задачи о погоне // Труды СПИИРАН. 2020. Вып. 18 (6). С. 1406–1429. URL: http://proceedings.spiiras.nw.ru/index.php/sp/article/view/4041 (дата обращения: 15.03.2022).

16. *Очков В.Ф., Гуличева Е.Г., Очкова Н.А.* Толстой и математика // Филология и культура. 2021. № 2. URL: http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Ellipse-Tolstoy.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

17. *Очков В.Ф., Иванова А.О., Алексеев М.Д.* Три жадных алгоритма // Информатика в школе. 2018. № 9. С. 34–42. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/3-Problem.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

18. *Очков В.Ф., Нори М.* Новый эллипс или Математический фарфоровый сервиз // Cloud of Science. 2018. Т. 5. № 3. С. 240–267. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tschirnhaus.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

19. *Очков В.Ф., Орлов К.А., Чудова Ю.В., Ивашов А.П.* IT в инженерных расчетах: SMath. СПб.: Лань. 2023.

20. *Очков В.Ф., Соколов А.В., Федорович С.Д., Мекес Л.* Путешествие от дома в школу по маршруту Ферма, или Второе оптическое свойство гиперболы // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 4. С. 494–517. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Optic-Ochkov.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

21. *Очков В.Ф., Тихонов А.И.* Mathcad и Python: обучение по технологии STEM. СПб.: Лань. 2023.

22. *Очков В.Ф., Фалькони А.Д.* Информатика, алгебра, геометрия: четыре арифметические кривые с покемоном // Информатика в школе. 2016. № 9. С. 57–61. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/4-curves.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

23. *Очков В.Ф., Фалькони А.Д.* Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. С. 397–418. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

24. *Очков В.Ф., Чудова Ю.В., Очкова Н.А.* Академическая шапочка математика, или Гибрид символа, числа и графика в задаче оптимизации // Математика в школе. 2020. № 1. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Math-School-01-20.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

25. *Толстой Л.Н.* Анна Каренина: роман. URL: https://онлайн-читать.рф/толстой-анна-каренина (дата обращения: 15.03.2022).

26. *Applegate D.L., Bixby R.E., Chvátal V., Cook W.J.*The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton University Press, 2006. 606 p.

27. *Hilgert J.* Robert Bosch: OPT ART: From Mathematical Optimization to Visual Design // Mathematische Semesterberichte. 2020. Vol. 67. P. 123–124.

28. *Mladenov I.M., Hadzhilazova M.* The Many Faces of Elastica. Springer International Publishing AG, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-61244-7.

29. *Ochkov V., Look A.* Math Lessons in Classical Literature // Journal of Humanistic Mathematics. 2015. Vol. 5. Is. 2. P. 121–132. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/MathLit.pdf (дата обращения: 15.03.2022).

30. *Ochkov V.F.* 2^5 Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC, 2020. 396 p.

31. *Ochkov V., Stevens A., Tikhonov A.* STEM Problems with Mathcad and Python. New York: Chapman & Hall, 2022. 428 p.

32. *Telloni A.I., Toffalori C.* Dostoyevsky as mathematician // Littera Matematica. 2015. Vol. 3. P. 207–204. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s40329-015-0097-x (дата обращения: 15.03.2022).

33. *Vitányi P.M.B.* Tolstoy's Mathematics in War and Peace // Mathematical Intelligencer. 2013. Vol. 35. P. 71–75. URL: https://doi.org/10.1007/s00283-012-9342-8 (дата обращения: 15.03.2022).

Научно-популярное издание

Очков Валерий Федорович
Очкова Наталья Алексеевна

ЛЕВ ТОЛСТОЙ И МАТЕМАТИКА

3-е издание, исправленное и дополненное

Корректоры *Е. А. Леонова, Н. А. Жигурова*
Оформление обложки *А. Бляхер*
Компьютерная верстка *М. А. Ковтун*

Московский педагогический государственный университет (МПГУ).
119435, Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1.

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования (УИД и ИП) МПГУ.
119571, Москва, пр-т Вернадского, д. 88, оф. 446,
тел. +7 (499) 730-38-61, e-mail: izdat@mpgu.su.

Отпечатано с предоставленных электронных файлов
в ИП Курнешов Е.А.,
Москва, Бережковская наб., д. 14, кв. 40.

Подписано в печать 26.12.2022. Формат 60×90/16.
Бум. офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 13,00.
Тираж 500 экз. Заказ № 1356.

ISBN 978-5-4263-1177-0

9 785426 311770